序 言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期新长征的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚
于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼
1980年1月

编者的话

本书包括不定积分与定积分两部分．不定积分是作为导数（或微商）的反问题引进的，它所讨论的是积分学的第一个基本问题．定积分是作为某种和式的极限引进的，它所讨论的是积分学的第二个基本问题．全书共分五章，第一、二章讲不定积分，第三、四章讲定积分，第五章讲定积分的一种推广——广义积分．

为了便于自学，本书选编了较多的例题与习题，书末附有答案或提示．初学者不一定全看、全做，可根据自己的情况，选学、选做其中的一部分．

本书力求既能由浅入深、通俗易懂，又有一定的严密性．但因编者水平有限，加以时间仓促，书中问题很多．希望广大读者随时提出宝贵意见．

在本书的编写过程中，曾得到北京大学地球物理系邓国祥同志，数学系方企勤、吴良大、王卫华等同志的支持和帮助，最后又由北京师范大学数学系赵慈庚教授审阅了全稿，在此表示衷心的感谢．

文　丽

于北京大学数学系

1979年3月

目　　录

第四章 定积分的应用

第五章 广 义 积 分

第一章

不定积分的概念与计算法则

第一节 原函数与不定积分的概念

1.1 原函数

微分学的基本问题是已知一个函数，要求它的变化率，这就是求导数的问题．例如，已知作直线运动的质点的运动规律（即路程对时间的依赖关系）为

$$s=s(t),$$

要求质点在时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，就是这样一个问题．我们只需将函数 $s=s(t)$ 对 t 求导数就可以了：

$$v(t)=s'(t)=\frac{ds}{dt}.$$

但是，在许多学科（例如力学、物理学、几何学等）以及各种实际问题里，往往遇到与此相反的问题：已知一个函数的变化率，要求原来的函数．例如，已知作直线运动的质点在任一时刻 t 的瞬时速度 $v=v(t)$，要求质点的运动规律 $s=s(t)$．在数学上，这种已知一个函数的导数，要求原来的函数（我们称它为原函数）的问题，就是积分学的第一个基本问题．

下面，我们给出原函数的定义．

定义 设函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义．如果对于 (a, b) 内任一点 x，都有

$$F'(x)=f(x),$$

或

$$dF(x)=f(x)dx,$$

那么，就称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的一个原函数.

【例 1】 设 $f(x)=3x^2$，则 $F(x)=x^3$ 是它的一个原函数. 事实上，我们有

$$(x^3)'=3x^2.$$

【例 2】 设 $f(x)=\cos x$，则 $F(x)=\sin x$ 是它的一个原函数.

【例 3】 设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，则 $F(x)=\arcsin x$ 是它的一个原函数.

思考题 $\arcsin x+3$，$\arcsin x-5$，$\arcsin x+\sqrt{2}$，$\arcsin x-2\ln\frac{\pi}{3}$ 等，是不是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的原函数?

1.2 不定积分

由于常数的导数是零，因此当 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数时，$F(x)+C$（C 是任意常数）也是 $f(x)$ 的原函数. 这就是说，如果 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$，那么，它就有无穷多个原函数：$F(x)+C$.

大家会问：这无穷多个原函数 $F(x)+C$ 是否包括了 $f(x)$ 的全体原函数呢？换句话说，$f(x)$ 的任何一个原函数是否都能表示成 $F(x)+C$ 的形式呢？回答是肯定的. 我们有

定理 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$（C 是任意常数）也是 $f(x)$ 的原函数，并且 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的全体原函数.

【证】 第一个结论是明显的：

$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=F'(x)+0=f(x).$$

下面证明第二个结论，即 $f(x)$ 的任何一个原函数 $G(x)$，

都可以用 $F(x)$ 加上一个常数来表示.

因为 $F'(x)=f(x),\quad G'(x)=f(x)$,

所以 $[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$.

由微分学中值定理,知

$$G(x)-F(x)=C\quad (C\text{ 是常数}),$$

即

$$G(x)=F(x)+C.$$

于是证明了 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的全体原函数. ▌

定理告诉我们:同一函数的任何两个原函数之间最多相差一个常数.

为了以后讨论方便,我们引进如下的定义.

定义 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$(C 是任意常数)称为 $f(x)$ 的*不定积分*,记作

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

其中 $f(x)$ 称为*被积函数*,$f(x)dx$ 称为*被积表达式*,x 称为*积分变量*,C 称为*积分常数*,符号 $\int$ 称为*积分号*.

积分号 $\int$ 是一种运算符号,表示对已给函数求它的全体原函数.例如:

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C,$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C,$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C.$$

我们看到,求原函数(或不定积分)与求导数是两种互逆的运算,这种互逆关系可以从下面几个式子很清楚地看出来:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]'=f(x), \quad 或 \quad d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx. \tag{1}$$

$$\int F'(x)\,dx=F(x)+C, \quad 或 \quad \int dF(x)=F(x)+C. \tag{2}$$

这就是说，对一个函数先积分再微分，结果是两者的作用互相抵消；若先微分再积分，则结果只差一常数.

求已给函数的原函数(或不定积分)的方法称为积分法.

1.3 不定积分的几何意义

在直角坐标系 xOy 中，$f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条积分曲线，其方程是 $y=F(x)$.

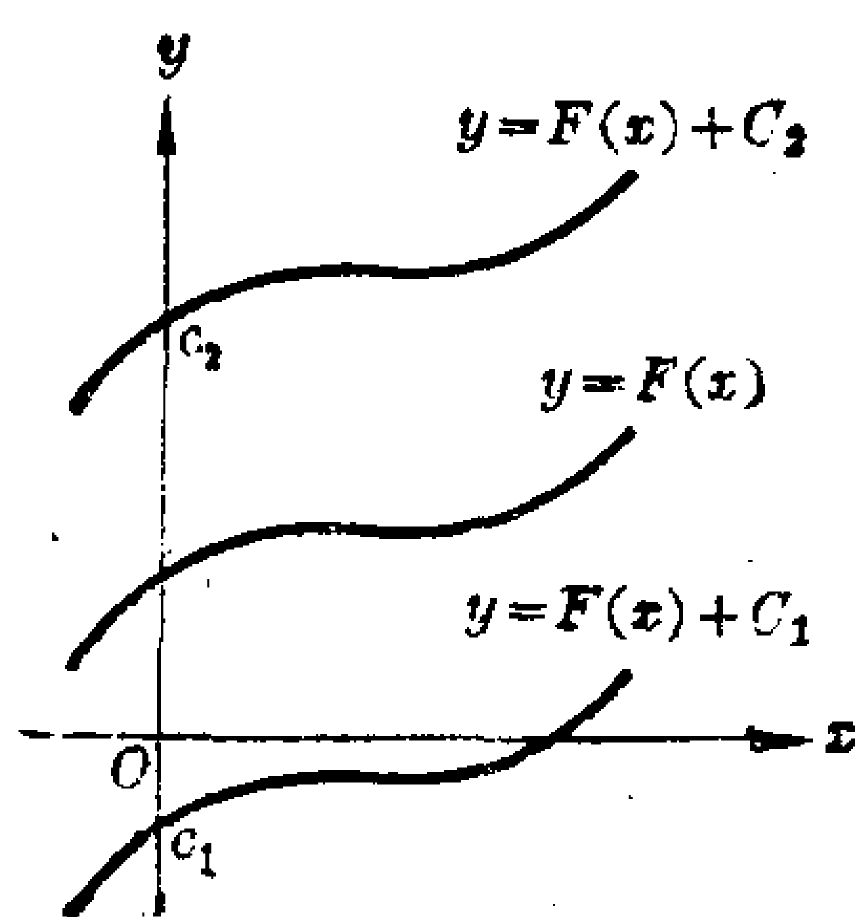


图 1-1

由上面的讨论知道：若 $f(x)$ 有一条积分曲线 $y=F(x)$，则有无穷多条积分曲线，它们的方程是

$$y=F(x)+C.$$

这些积分曲线称为 $f(x)$ 的积分曲线族.

积分曲线族中的任何一条曲线都可以由 $y=F(x)$ 沿 Oy 轴平移一段 C 得到(图 1-1). 因此，所有积分曲线是彼此平行的. 这就是说，在横坐标相同(例如是 x)的点处，所有积分曲线的切线彼此平行，这些切线有相同的斜率，都是 $f(x)$：

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

因此，我们可以说：不定积分 $\int f(x)\,dx$ 在几何上表示 $f(x)$ 的积分曲线族

$$y=\int f(x)\,dx,$$

这族曲线的特点是在横坐标相同的点处，它们的切线有相同的斜率 $f(x)$，因而是彼此平行的.

如果要求一条通过定点 (x_0, y_0) 的积分曲线，那么，可以通过下式

$$y_0 = F(x_0) + C,$$

解出常数 $$C = y_0 - F(x_0),$$

这样就得到了所求的积分曲线

$$y = F(x) + [y_0 - F(x_0)].$$

确定任意常数的条件称为*初始条件*，可写作

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,$$

或 $$y(x_0) = y_0.$$

【例 4】 在切线斜率为 $3x^2$ 的积分曲线族中，求一条通过定点 $(-1, 2)$ 的积分曲线.

解：设所求曲线为 $y = y(x)$. 已知

$$y' = 3x^2,$$

因此，有 $$y = x^3 + C.$$

为了确定出常数 C，我们将初始条件

$$y\big|_{x=-1} = 2$$

代入，于是有

$$2 = (-1)^3 + C,$$

解出 $$C = 3.$$

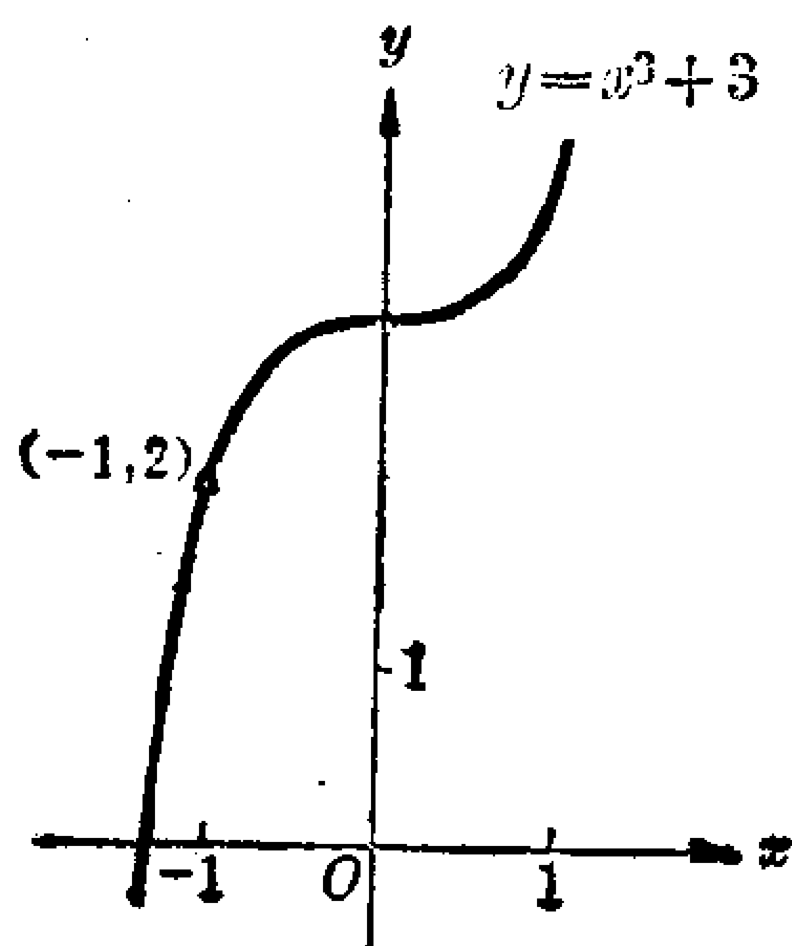


图 1-2

从而，所求的曲线(图 1-2)为

$$y = x^3 + 3.$$

最后，我们提一个问题：什么样的函数才有原函数呢？也就是说，$f(x)$ 应具备什么条件，才能保证它的原函数一定存在呢？这个问题现在暂时还不能解决，我们到第三章第三

节再去讨论它．目前所讨论的函数，都假定它是有原函数的．换句话说，第一、二章主要讨论函数的积分法，暂不涉及原函数的存在问题．

习 题 一

1．求下列不定积分：

(1) $\int \sin x\,dx$;　　(2) $\int e^x dx$;

(3) $\int x^4 dx$;　　(4) $\int \sqrt{x}\,dx$;

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$;　　(6) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$;

(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$;　　(8) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

2．在积分曲线族 $y=\int 2x\,dx$ 中，求一条通过点 $(0,\ -1)$ 的曲线，并画出它的图象．

第二节　不定积分的计算

为了有效地计算不定积分，必须掌握一张基本积分表和几个运算法则．这正象计算导数时，必须掌握基本导数表和“加、减、乘、除、复合”五个运算法则一样．我们将会看到，由于积分法是微分法的逆运算，因此这一节的内容，刚好是微分法中相应内容的逆转．也就是说，把过去的微分公式逆过来，就能得到许多积分公式；把过去的一些微分法则逆过来，就得到相应的积分法则．

2.1 基本积分表

(1) $\int 0\,dx = C$.

(2) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (\alpha = -1)$.

(4) $\int e^x dx = e^x + C$.

(5) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$.

(6) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

(7) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

(8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$.

(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$.

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$.

(11) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$.

为了证明这些积分公式，只须证明右端的导数等于左端的被积函数．我们以公式(3)为例．

【证】 当 $x>0$ 时，

$$[\ln|x|]' = [\ln x]' = \frac{1}{x};$$

当 $x<0$ 时，

$$[\ln|x|]' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

因此，不论 $x>0$ 或 $x<0$，都有

$$[\ln|x|]' = \frac{1}{x}.$$

由不定积分的定义，知

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C. \quad \rbrack$$

说明

① 幂函数 x^α 的不定积分由公式(2)，(3)共同给出：当 $\alpha \neq -1$ 时，用公式(2)；当 $\alpha = -1$ 时，用公式(3)．即

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, & \text{当 } \alpha \neq -1; \\ \ln|x| + C, & \text{当 } \alpha = -1. \end{cases}$$

② 公式(2)的几个特殊情形，今后常用，有必要单独记忆：

当 $\alpha = 0$ 时，有 $\int 1\,dx = x + C$,

当 $\alpha = -\frac{1}{2}$ 时，有 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$,

当 $\alpha = -2$ 时，有 $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$.

2.2 积分法的两个简单法则

微分法有两个简单法则：

(1) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$ （k 是常数）.

这就是："常数因子提出来".

(2) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

这就是："一项一项分开微".

与它们相对应，积分法也有两个简单的法则：

(1) $\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ （$k \neq 0$ 是常数）.

即"常数因子提出来".

(2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)dx.$

即"一项一项分开积"。

【证】 只须证明右端的导数等于左端的被积函数.

(1) $\left[k\int f(x)dx\right]' = k\left[\int f(x)dx\right]' = k\cdot f(x).$

(2) $$\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]'$$
$$= f(x) \pm g(x). \quad \blacksquare$$

法则(2)很容易推广到任意有限多个函数的代数和的情形:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]dx$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx.$$

利用基本积分表和两个简单法则，我们就可以求一些稍微复杂的不定积分了.

【例 1】 $$\int 3x^4\,dx = 3\int x^4\,dx = 3\left(\frac{1}{5}x^5 + C_1\right)$$
$$= \frac{3}{5}x^5 + 3C_1 = \frac{3}{5}x^5 + C.$$

这里 $C = 3C_1$ 是任意常数.

【例 2】 $$\int [e^x - 2\cos x + \sqrt{2}\,x^3]dx$$
$$= \int e^x\,dx - \int 2\cos x\,dx + \int \sqrt{2}\,x^3\,dx$$
$$= e^x - 2\int \cos x\,dx + \sqrt{2}\int x^3\,dx$$
$$= e^x - 2\sin x + \frac{\sqrt{2}}{4}x^4 + C.$$

这里，本来每一个积分都有一个任意常数，为了简单起见，我们用 C 表示它们的代数和.

【例 3】 $\int\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{1+x^2}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+10\right]dx$

$$=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx-5\int\frac{1}{1+x^2}\,dx+3\int\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+10\int 1\,dx$$

$$=\sqrt{x}-5\operatorname{arctg}x-\frac{3}{x}$$

$$-2\arcsin x+10x+C.$$

【例 4】 $\int\frac{(2x\sqrt{x}-x+3\sqrt{x})\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

$$=\int\frac{2x^2-x^{3/2}+3x}{x^2}\,dx=\int\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}\right)dx$$

$$=2\int dx-\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx+3\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$=2x-2\sqrt{x}+3\ln|x|+C.$$

【例 5】 $\int(2^x-3^x)^2dx=\int[(2^x)^2-2(2^x)\cdot(3^x)+(3^x)^2]dx$

$$=\int[4^x-2\cdot 6^x+9^x]dx$$

$$=\frac{4^x}{\ln 4}-2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C.$$

【例 6】 $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\,dx$

$$=\int\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}\,dx$$

$$=\int(\cos x+\sin x)\,dx=\sin x-\cos x+C.$$

【例 7】 $$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$
$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

【例 8】 $$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx$$
$$= \operatorname{tg} x - x + C.$$

【例 9】 $$\int \frac{3x^2}{1+x^2} dx = 3\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = 3\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx$$
$$= 3\left[\int 1 dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx\right]$$
$$= 3x - 3 \operatorname{arctg} x + C.$$

以上各例，都是利用两个简单法则，把一个比较复杂的积分化成若干个可以查基本积分表的积分. 在这里，有时要利用一些三角恒等式，有时又要设法把被积函数拆成几项(如例9). 后面这种方法称为分项积分法，今后常用.

习 题 二

求下列不定积分:

1. $\int 4x dx.$

2. $\int \sqrt{3x} dx.$

3. $\int \frac{ay^2}{b} dy.$

4. $\int x(1-x^2)^2 dx.$

5. $\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) dx.$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{2gh}} dh.$

7. $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} dx.$

8. $\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx.$ 9. $\int(3^x+x^3)dx.$

10. $\int e^t(3-\sqrt[3]{t}\cdot e^{-t})dt.$ 11. $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx.$

12. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx.$ 13. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,dx.$

14. $\int\frac{2+x^2}{1+x^2}\,dx.$ 15. $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx.$

16. $\int\frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$ 17. $\int 3^x\cdot e^x\,dx.$

18. $\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\,dx.$ 19. $\int\frac{1}{x^6+x^4}\,dx.$

2.3 换元积分法

利用基本积分表和两个简单法则，我们虽已会求一些稍微复杂的不定积分，但这毕竟是非常有限的．事实上，我们只会求基本积分表中出现的那几个函数的线性组合*)的不定积分，而对于许多常见的、并不很复杂的积分，例如

$$\int\cos 3x\,dx,\quad \int xe^{x^2}\,dx,\quad \int\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

$$\int xe^x\,dx,\quad \int\ln x\,dx,\quad \int\frac{1}{\sin^3 x}\,dx$$

等等，就不会求了．因此，我们需要进一步掌握其它的积分法则，以便求出更多的初等函数的不定积分．这就是本段要介绍的换元积分法和下一段的分部积分法．

换元积分法按其应用的侧重面不同而分为两种，分别称为第一换元法及第二换元法．

---

*) m 个函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_m(x)$ 的线性组合是指表达式

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_mf_m(x),$$

其中 k_1, k_2, …, k_m 是常数．

1. 第一换元法(凑微分法)

考查不定积分

$$\int e^{3x}dx.$$

被积函数 e^{3x} 是 x 的复合函数，基本积分表中没有这样的公式. 如果能把被积表达式“$e^{3x}dx$”看成 e^{3x} 与 dx 的乘积，那么问题就容易解决了. 我们可以设法把积分 $\int e^{3x}dx$ 化成某个积分公式的样子：

$$\int e^{3x}dx=\int e^{3x}\cdot\frac{1}{3}d(3x)=\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)$$

$$\xlongequal{令 u=3x}\frac{1}{3}\int e^{u}du=\frac{1}{3}e^{u}+C$$

$$\xlongequal{u=3x}\frac{1}{3}e^{3x}+C.$$

以上这种作法的理论根据是下面的定理.

定理 1(第一换元法) 设

$$\int f(u)du=F(u)+C, \tag{1}$$

$u=\varphi(x)$ 可微，则有

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C. \tag{2}$$

【证】 只需证明(2)式右端的导数等于左端的被积函数. 由复合函数求导公式，有

$$\{F[\varphi(x)]\}'_x\xlongequal{u=\varphi(x)}F'_u(u)\cdot u'_x=f(u)\cdot\varphi'(x)$$

$$=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).\quad ▌$$

把(1)式和(2)式联系起来，我们可以把定理 1 改写成如下便于应用的形式：

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\underset{\sim\sim\sim}{\varphi'(x)dx}=\int f[\varphi(x)]\,\underset{\sim\sim\sim}{d[\varphi(x)]}$$

$$\xlongequal{u=\varphi(x)}\int f(u)du=F(u)+C$$

$$\xlongequal{u=\varphi(x)}F[\varphi(x)]+C. \qquad (3)$$

上面所说的积分 $\int e^{3x}dx$, 正是根据这种办法求出来的.

再看几个例子.

【例 10】 $\int e^{-x}dx=-\int e^{-x}d(-x)\xlongequal{u=-x}-\int e^{u}du$

$$\xlongequal{\text{查积分表}}-e^{u}+C\xlongequal{u=-x}-e^{-x}+C.$$

【例 11】 $\int\frac{1}{x+2}dx=\int\frac{1}{x+2}d(x+2)\xlongequal{u=x+2}\int\frac{1}{u}du$

$$\xlongequal{\text{查表}}\ln|u|+C$$

$$\xlongequal{u=x+2}\ln|x+2|+C.$$

【例 12】 $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$

$$\xlongequal{u=ax+b}\frac{1}{a}\int f(u)du$$

$$\xlongequal{\text{查表}}\frac{1}{a}F(u)+C$$

$$=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

这里, 假定 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数, 并且 $a\neq0$.

【例 13】 $\int \operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{1}{\cos x}(-\sin x)dx$

$$= -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) \xlongequal{u=\cos x} -\int \frac{1}{u} du$$

$$\xlongequal{\text{查表}} -\ln|u| + C \xlongequal{u=\cos x} -\ln|\cos x| + C.$$

思考题 证明

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C.$$

【例 14】 $\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, d(2x)$

$$\xlongequal{u=2x} \frac{1}{2}\int \sin u \, du = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$\xlongequal{u=2x} -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

本题还有一种作法:

$$\int \sin 2x \, dx = \int 2\sin x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int 2\sin x d(\sin x) \xlongequal{u=\sin x} \int 2u \, du$$

$$\xlongequal{\text{查表}} u^2 + C \xlongequal{u=\sin x} \sin^2 x + C.$$

两种作法,两种结果,怎样解释呢?

要解释这一点并不困难. 由倍角公式

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

知 $\sin 2x$ 的两个原函数 $-\frac{1}{2}\cos 2x$ 与 $\sin^2 x$ 之间, 只差一个常数 $\frac{1}{2}$, 这与第一节第二段的定理是一致的.

【例 15】 $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)\xlongequal{u=1+x^2}\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du$$

$$\xlongequal{查表}\sqrt{u}+C\xlongequal{u=1+x^2}\sqrt{1+x^2}+C.$$

当我们运算熟练以后，就可以把中间变量 u 省去不写.

【例 16】 $$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$=2\int\cos\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})=2\sin\sqrt{x}+C.$$

【例 17】 $$\int\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}dx=-\int e^{1/x}d\left(\frac{1}{x}\right)=-e^{1/x}+C.$$

【例 18】 $$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x\,d(\ln x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C.$$

【例 19】 $$\int\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int\frac{1}{(\arcsin x)^2}d(\arcsin x)$$

$$=-\frac{1}{\arcsin x}+C.$$

【例 20】 $$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\int\frac{1}{(x+a)(x-a)}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)\cdot(x-a)}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x-a}dx-\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x+a}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x-a}d(x-a)-\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x+a}d(x+a)$$

$$=\frac{1}{2a}\ln|x-a|-\frac{1}{2a}\ln|x+a|+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

这里，我们利用了分项积分法.

思考题　证明

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C.$$

【例 21】 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\,dx$

$$\xlongequal{\text{当}a>0}\int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

思考题　证明

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

【例 22】 $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x)$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x+C.$$

思考题　证明

$$\int \cos^2 x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x+C.$$

【例 23】 $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\, dx$

$$= \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)\, d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x)\, d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

思考题 怎样求不定积分

$$\int \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n+1} x\, dx,$$

$$\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^{2m} x\, dx?$$

这里，m、n 是正整数.

【例 24】 $\int \cos 3x \cdot \sin x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin(3x + x) - \sin(3x - x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 4x\, dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin 4x\, d(4x) - \frac{1}{4}\int \sin 2x\, d(2x)$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

【例 25】 $\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}\, dx$

$$= \int \frac{1}{\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}\, d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\int\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\int\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\int\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

【例 26】 $\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx$

$$=\int\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\xlongequal{\text{由例 25}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

本题的第二种作法是:

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{1-\sin^2 x}d(\sin x)$$

$$\xlongequal{\text{由例 20 思考题}}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sin x+1}{1-\sin x}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)\cdot(1+\sin x)}{(1-\sin x)\cdot(1+\sin x)}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|^{2}+C=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C$$

$$=\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C.$$

请读者说明这两种作法的结果是一样的.

本题还可以这样作:

注意到

$$(\sec x)'=\sec x\cdot\operatorname{tg} x,$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\sec^{2} x,$$

用一个恒等于1的因式

$$\frac{\sec x+\operatorname{tg} x}{\sec x+\operatorname{tg} x}$$

去乘被积函数 $\frac{1}{\cos x}=\sec x$, 得

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\sec x\,dx$$

$$=\int\sec x\cdot\frac{\sec x+\operatorname{tg} x}{\sec x+\operatorname{tg} x}dx$$

$$=\int\frac{\sec x\cdot\operatorname{tg} x+\sec^{2} x}{\sec x+\operatorname{tg} x}dx$$

$$=\int\frac{d(\sec x+\operatorname{tg} x)}{\sec x+\operatorname{tg} x}$$

$$=\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C.$$

思考题 证明

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=\ln|\csc x-\operatorname{ctg} x|+C,$$

并说明此结果与例25的结果相同.

【例27】 $\int\frac{1}{\sin^{2} x+3\cos^{2} x}dx$

$$=\int\frac{1}{(\operatorname{tg}^{2} x+3)\cos^{2} x}dx$$

$$=\int\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+(\sqrt{3})^2}d(\operatorname{tg} x)$$

$$\xlongequal{\text{由例 21 思考题}}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right)+C。$$

思考题 证明 当 a、$b\neq 0$ 时,

$$\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)+C.$$

【例 28】 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2+3x-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{-(x^2-3x-2)}}dx$

$$\xlongequal{\text{配方}}\int\frac{1}{\sqrt{-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}\right]}}dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}d\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\xlongequal{\text{例 21}}\arcsin\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}+C=\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{17}}+C.$$

以上各例，所用的都是第一换元法，也就是换元公式(3)，它是复合函数求导公式的逆转. 它把一个不能直接查基本积分表的积分 $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx$, 化成另一个可以查表(或引用典型例题结果)的积分 $\int f(u)du$, 即

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)]$$

$$\xlongequal{\text{令 } u=\varphi(x)}\int f(u)du\xlongequal{\text{查表}}F(u)+C$$

$$\xlongequal{u=\varphi(x)}F[\varphi(x)]+C。$$

这里关键的一步是把被积表达式 $f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx$ 拆成两部分的乘积，一部分是中间变量 $u=\varphi(x)$ 的函数：

$$f[\varphi(x)]=f(u);$$

另一部分是中间变量 $u=\varphi(x)$ 的微分：

$$\varphi'(x)dx=d[\varphi(x)]=du.$$

因此，第一换元法也叫做*凑微分法*．一般说来，所给的不定积分，其被积表达式往往并不是已经拆好了的，而是需要我们去拆．正因为如此，才叫做"凑"微分．

在我们运用第一换元法求某些不定积分时，以下三角公式是常用的：

同角间的三角恒等式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad \operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

倍角、半角公式

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x,\quad \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2},$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

积化和差公式

$$\sin mx\cdot\sin nx=-\frac{1}{2}[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x],$$

$$\cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x],$$

$$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x].$$

习　题　三

1．在下列各式中，填入适当的系数$\left(\text{例如 } dx=\frac{1}{2}d(2x-3),\ x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3)\text{ 等}\right)$：

(1) $dx = \underline{\qquad} d\left(\frac{x}{3}\right)$;　　(2) $dx = \underline{\qquad} d(1-2x)$;

(3) $dx = \underline{\qquad} d(ax+b) \quad (a \neq 0)$;

(4) $x\,dx = \underline{\qquad} d(x^2+1)$;　　(5) $x^2\,dx = \underline{\qquad} d(2-3x^3)$;

(6) $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \underline{\qquad} d(\sqrt{x})$;　　(7) $xe^{-2x^2}dx = \underline{\qquad} d(e^{-2x^2})$;

(8) $\frac{1}{\cos^2 x}dx = \underline{\qquad} d(3\operatorname{tg} x+1)$;

(9) $\cos\left(\frac{x}{3}-2\right)dx = \underline{\qquad} d\left[\sin\left(\frac{x}{3}-2\right)\right]$;

(10) $\frac{1}{(2x+3)^2}dx = \underline{\qquad} d\left(\frac{1}{2x+3}\right)$.

2. 填空:

(1) $e^{kx}dx = d(\quad)$;　　(2) $x\,dx = d(\quad)$;

(3) $x^2 dx = d(\quad)$;　　(4) $\frac{1}{x^2}dx = d(\quad)$;

(5) $\frac{1}{x^3}dx = d(\quad)$;　　(6) $\frac{1}{x}dx = d(\quad)$;

(7) $\frac{1}{1+x^2}dx = d(\quad)$;　　(8) $\cos(\omega t+\varphi)dt = d(\quad)$;

(9) $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = d(\quad)$;　　(10) $\sin x \cdot \cos x\,dx = d(\quad)$.

3. 下列各式是否正确? 为什么?

(1) $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \ln(1+e^x)+C$;

(2) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)d(\cos x) = \operatorname{tg} x - x + C$;

(3) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$;

(4) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$;

(5) $\int \frac{1}{1-x}dx = -\int \frac{1}{1-x}d(1-x)$;

(6) $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$;

(7) $\int \frac{-x\,dx}{\sin^2 x} = \int x \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x} \right) dx = \int x d\left(\frac{1}{\sin x} \right);$

(8) $\int \frac{1-\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos x} dx$

$$= \operatorname{tg} x - \ln|\cos x| + C.$$

4. 求下列不定积分:

(1) $\int \operatorname{sh} x\,dx;$

(2) $\int \operatorname{ch} x\,dx;$

(3) $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x\,dx;$

(4) $\int \frac{1}{3-2x} dx;$

(5) $\int (3x+5)^{100} dx;$

(6) $\int \pi e^{-\frac{\pi}{4}x} dx;$

(7) $\int \frac{6dy}{(1+2y)^3};$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x+\theta)};$

(9) $\int \sin(\omega t+\varphi) dt;$

(10) $\int (a+bx)^k dx \quad (b \neq 0);$

(11) $\int \operatorname{tg} 5x\,dx;$

(12) $\int \sin^2(\omega t+\varphi) dt;$

(13) $\int (e^{\frac{x}{a}} - \cos bx + 1) dx;$

(14) $\int \frac{kt^n dt}{a+bt^{n+1}} \quad (b \neq 0);$

(15) $\int \cos 3x \cdot \sin 3x\,dx;$

(16) $\int \frac{x+2}{x-1} dx;$

(17) $\int \frac{x\,dx}{a+bx} \quad (b \neq 0);$

(18) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)};$

(19) $\int \frac{x^2-4}{x-3} dx;$

(20) $\int \frac{x^3 dx}{x-1};$

(21) $\int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \frac{1}{1+x} dx;$

(22) $\int x e^{x^2} dx;$

(23) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2}};$

(24) $\int (x-1) e^{x^2-2x} dx;$

(25) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{x^2+2x}};$

(26) $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8};$

(27) $\int \frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}};$

(28) $\int x^2 \sqrt[4]{1+x^3} dx;$

(29) $\int \frac{x^5 dx}{x^6+4};$

(30) $\int \frac{x^3 dx}{2-x^4};$

(31) $\int\frac{x\,dx}{2-x^4}$;　　(32) $\int\frac{dx}{x(x^6+4)}$;

(33) $\int\frac{4-\ln x}{x}\,dx$;　　(34) $\int\frac{1}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}\,dx$;

(35) $\int\frac{\ln x\,dx}{x(\ln^2 x-1)}$;　　(36) $\int\frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx$;

(37) $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{2}{x}\,dx$;　　(38) $\int\frac{1}{x^2}e^{\left(1-\frac{3}{x}\right)}\,dx$;

(39) $\int\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;　　(40) $\int\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

(41) $\int(2x^{\frac{3}{2}}-1)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}\,dx$;　　(42) $\int e^x\sqrt[3]{1-e^x}\,dx$;

(43) $\int\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$;　　(44) $\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx\left(或\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx\right)$;

(45) $\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$;　　(46) $\int\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$;

(47) $\int e^{e^x+x}\,dx$;　　(48) $\int\frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx$;

(49) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{tg}x}}$;　　(50) $\int\left(\frac{\sec x}{1-\operatorname{tg}x}\right)^2dx$;

(51) $\int\frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}\,dx$;　　(52) $\int\frac{\cos ax}{b-\sin ax}\,dx\quad(a\neq 0)$;

(53) $\int\frac{\sin^2 x\cdot\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$;　　(54) $\int\frac{\sqrt{\operatorname{arc\,tg}x}}{1+x^2}\,dx$;

(55) $\int\frac{dx}{(1-\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;　　(56) $\int(2-\sec 2x)^2dx$;

(57) $\int\frac{1+\operatorname{tg}x}{\sin 2x}\,dx$;　　(58) $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,dx$;

(59) $\int\frac{1}{1+\sin x}\,dx$;　　(60) $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$;

(61) $\int\frac{1}{1+\cos x}\,dx$;　　(62) $\int\frac{1}{1-\cos x}\,dx$;

(63) $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x} dx$;

(64) $\int \frac{e^x+\sin x}{(e^x-\cos x)^2} dx$;

(65) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} dx$;

(66) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$;

(67) $\int \sin^{\frac{2}{7}} x \cdot \cos^3 x\, dx$;

(68) $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$;

(69) $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$;

(70) $\int (1-\operatorname{tg} 2x)^2 dx$;

(71) $\int \frac{\cos^5 \varphi}{\sqrt{\sin \varphi}} d\varphi$;

(72) $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x\, dx$;

(73) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$;

(74) $\int \sin 3x \cdot \sin 2x\, dx$;

(75) $\int \cos 3x \cdot \sin 2x\, dx$;

(76) $\int \cos x \cdot \cos^2 3x\, dx$;

(77) $\int \sin x \cdot \cos(x+a) dx$;

(78) $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x\, dx$;

(79) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$;

(80) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$;

(81) $\int \frac{1}{a^2-b^2\cos^2 x} dx$;

(82) $\int \frac{dx}{4x^2-1}$;

(83) $\int \frac{2dt}{3-8t^2}$;

(84) $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{9-\sin^2\theta}$;

(85) $\int \frac{dx}{m^2+(x+n)^2}$;

(86) $\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

(87) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$;

(88) $\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$;

(89) $\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}} dx$;

(90) $\int \frac{1}{x^2-2x-5} dx$;

(91) $\int \frac{1}{2x^2+3x+2} dx$.

2. 第二换元法(作代换法)

上面我们学习了第一换元法(或凑微分法)，它常常能把

一个比较复杂的积分 $\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx$ 化成可以查表(或典型例题)的形式：$\int f(u)du$.

但是，我们也往往遇到相反的情形：要求的积分是 $\int f(u)du$，形式上虽然简单，实际上却很难求．这时，我们就设法作一个代换

$$u=\varphi(x),$$

把积分 $\int f(u)du$ 化成

$$\int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)]=\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx,$$

如果后者是容易计算的，那么，问题就解决了．这相当于从相反的方向来运用公式(3)．我们先看一个例子．

【例 29】 求 $\int\frac{1}{1+\sqrt{u}}du$.

解：这个积分不能从基本积分表中查到，也无法用第一换元法．这时，我们设法作一个代换，以便把被积函数中的根号去掉，然后倒过来利用公式(3)，看看是否容易积分．

令 $\sqrt{u}=x$，即作代换

$$u=x^2,$$

于是

$$\frac{1}{1+\sqrt{u}}=\frac{1}{1+x},$$

$$du=d(x^2)=2x\,dx,$$

从而

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{u}}du\xlongequal{u=x^2}\int\frac{1}{1+x}2x\,dx$$

$$\xlongequal{\text{分项积分}} 2\int\frac{(1+x)-1}{1+x}dx$$

$$=2\left[\int dx-\int\frac{1}{1+x}dx\right]$$

$$=2[x-\ln|1+x|]+C$$

$$\xlongequal{x=\sqrt{u}} 2[\sqrt{u}-\ln(1+\sqrt{u})]+C.$$

我们看到：作代换$u=x^2$，再把公式(3)倒过来用，就能求出不定积分$\int\frac{1}{1+\sqrt{u}}du$. 这种求积分的方法叫做第二换元法(或作代换法).

在习惯上，由于所要求的不定积分的积分变量往往记作x，而不记作u，因此，上面例 29 又可写为

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \xlongequal[(x=t^2)]{\text{令}\sqrt{x}=t} \int\frac{1}{1+t}d(t^2)$$

$$=\int\frac{1}{1+t}2t\,dt=2\int\frac{(1+t)-1}{1+t}dt$$

$$=2\left[\int dt-\int\frac{1}{1+t}dt\right]$$

$$=2[t-\ln|1+t|]+C$$

$$\xlongequal{t=\sqrt{x}} 2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C.$$

这里，由于作代换而引进了新的变量t，在最后的结果中，还需要把t的函数还原成原来的变量x的函数，这就要求从所作的代换$x=t^2$中，解出反函数$t=\sqrt{x}$来.

把例 29 的作法一般化，就是

$$\int f(x)dx \xlongequal{\text{令}\,x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]d[\varphi(t)]$$

$$=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt \xlongequal{\text{查表}} \Phi(t)+C$$

$$\xlongequal{\text{变量还原}} \Phi[\varphi^{-1}(x)]+C. \tag{4}$$

由于变量还原时，要求代换函数 $x=\varphi(t)$ 有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，因此，我们假定代换 $x=\varphi(t)$ 是可微的，并且 $\varphi'(t)\neq 0$.

于是，我们有

定理2（第二换元法） 设 $x=\varphi(t)$ 是可微函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$. 若

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt=\Phi(t)+C, \tag{5}$$

则

$$\int f(x)dx=\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C. \tag{6}$$

【证】 只需证明(6)式右端对 x 的导数等于左端的被积函数.

由复合函数微分法及反函数微分法，有

$$\frac{d}{dx}\Phi[\varphi^{-1}(x)]\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)}\frac{d\Phi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\Phi'(t)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\xlongequal{\text{由(5)式}}\{f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\{f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$=f[\varphi(t)]\xlongequal{x=\varphi(t)}f(x).$$

于是(6)式成立. ▌

(6)式就是上面的(4)式，而(4)式是比较便于运用的.

【例30】 求 $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

解：为了去掉根号，令 $\sqrt[3]{3x+1}=t$，即作代换

$$x=\frac{t^3-1}{3},$$

于是
$$\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}=\frac{\frac{t^3-1}{3}+1}{t}=\frac{t^3+2}{3t},$$

$$dx=d\left(\frac{t^3-1}{3}\right)=t^2\,dt,$$

从而

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx \xlongequal{\text{令}x=\frac{t^3-1}{3}} \int\frac{t^3+2}{3t}\cdot t^2\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\int(t^4+2t)\,dt=\frac{1}{15}t^5+\frac{1}{3}t^2+C$$

$$\xlongequal{t=\sqrt[3]{3x+1}} \frac{1}{15}(3x+1)^{5/3}+\frac{1}{3}(3x+1)^{2/3}+C$$

$$=\frac{1}{5}(x+2)(3x+1)^{2/3}+C.$$

思考题 1 证明

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

提示：作代换 $x=t^6$(即令 $\sqrt[6]{x}=t$).

思考题 2 当被积函数含有一次根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 时，作什么代换合适?

下面介绍当被积函数含有二次根式$\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，怎样作代换.

显然，仿照上面一次根式的办法作代换是行不通的.

这里的办法，是运用三角恒等式

$$1-\sin^2 t=\cos^2 t,$$

$$1+\mathrm{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\frac{1}{\cos^2 t}-1=\mathrm{tg}^2 t \quad (\text{或} \sec^2 t-1=\mathrm{tg}^2 t),$$

把根号下的两项(平方差或平方和)，化为某一个函数的完全平方，从而把根号去掉.

【例 31】 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$.

解：因为

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\overset{a>0}{=\!=}a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

所以可作正弦代换

$$\frac{x}{a}=\sin t, \quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

$\left(\text{这里限制在反正弦函数 } t=\arcsin\frac{x}{a} \text{ 的主值范围之内}\right)$.

于是

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\xlongequal{\text{令 }\frac{x}{a}=\sin t}a\sqrt{1-\sin^2 t}$$

$$=a\sqrt{\cos^2 t}=a|\cos t|=a\cos t$$

$$\left(\text{因为当 } -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2} \text{ 时，} \cos t>0\right),$$

又 $$dx=d(a\sin t)=a\cos t\,dt,$$

从而

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\xlongequal{\text{令 }x=a\sin t}\int a\cos t\cdot a\cos t\,dt$$

$$=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cdot\cos t+C_1\right)^{*)}$$

---

*) 这里，利用了上一段中例 22 的思考题结果：

$$\int\cos^2 x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x+C.$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cdot\cos t)+C.$$

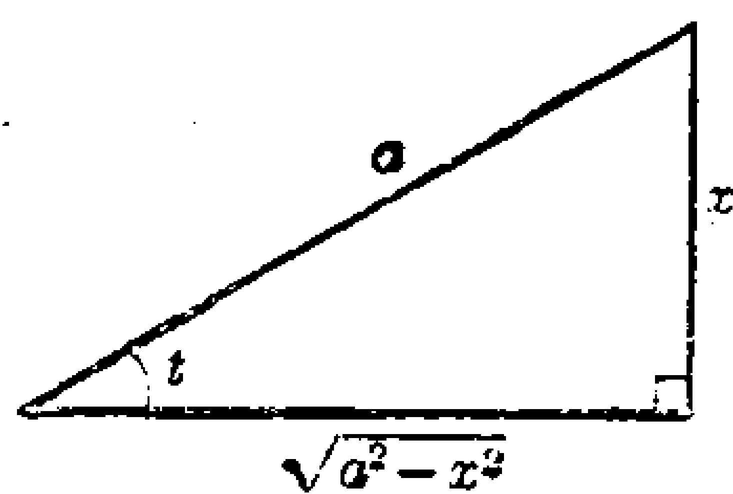


图 1-3

为了将新变量 t 还原为原来的变量 x，可以根据代换函数 $x=a\sin t$ 或 $\frac{x}{a}=\sin t$，作一个直角三角形（图 1-3），使它的一个锐角为 t，对边为 x，斜边为 a，从而邻边为 $\sqrt{a^2-x^2}$. 这样，就有

$$\sin t=\frac{x}{a},$$

$$\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

再从 $x=a\sin t$ 中反解出

$$t=\arcsin\frac{x}{a},$$

于是所求积分为

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

思考题 试用正弦代换

$$x=a\sin t\quad(a>0)$$

证明 $$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C\quad(a>0).$$

【例 32】 求 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx\quad(a>0)$.

解：注意到

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}=a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

而
$$1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t},$$

因此，若作如下正切代换

$$\frac{x}{a}=\operatorname{tg} t \quad 即 \quad x=a\operatorname{tg} t \quad \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \xlongequal{令\frac{x}{a}=\operatorname{tg} t} a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}$$

$$=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=a\frac{1}{|\cos t|}=a\frac{1}{\cos t},$$

于是去掉了根号．再将

$$dx=d(a\operatorname{tg} t)=a\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

代入，便得到

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\int\frac{1}{\frac{a}{\cos t}}\cdot a\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$=\int\frac{1}{\cos t}dt=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C_1$$

(这里利用了上一段例 26 的结果：

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C\Big).$$

最后，为了将变量还原，可根据代换函数 $x=a\operatorname{tg} t$ 作直角三角形(图 1-4)，这样，就有

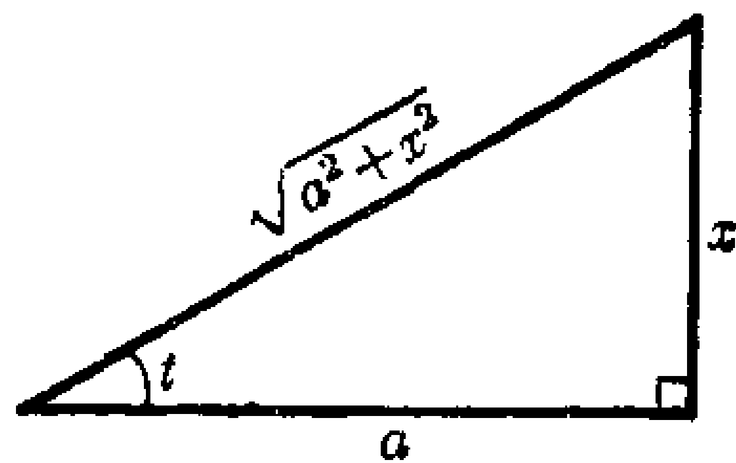


图 1-4

$$\sec t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a},$$

$$\operatorname{tg} t=\frac{x}{a}.$$

从而所求积分

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln|\sqrt{a^2+x^2}+x|-\ln a+C_1$$

$$=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C\quad(C=C_1-\ln a).$$

思考题 试用正切代换

$$x=a\operatorname{tg}t\quad(a>0)$$

证明

$$\int\frac{x^3}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx=\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+C\quad(a>0).$$

【例 33】 求 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx\quad(a>0)$.

解: 作正割代换

$$x=a\sec t\quad\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2 t-1)}$$

$$=a\sqrt{\operatorname{tg}^2 t}=a|\operatorname{tg}t|=a\operatorname{tg}t,$$

$$dx=d(a\sec t)=a\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{1}{a\operatorname{tg}t}\cdot a\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$=\int\frac{1}{\cos t}dt=\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C\quad(C=C_1-\ln a).$$

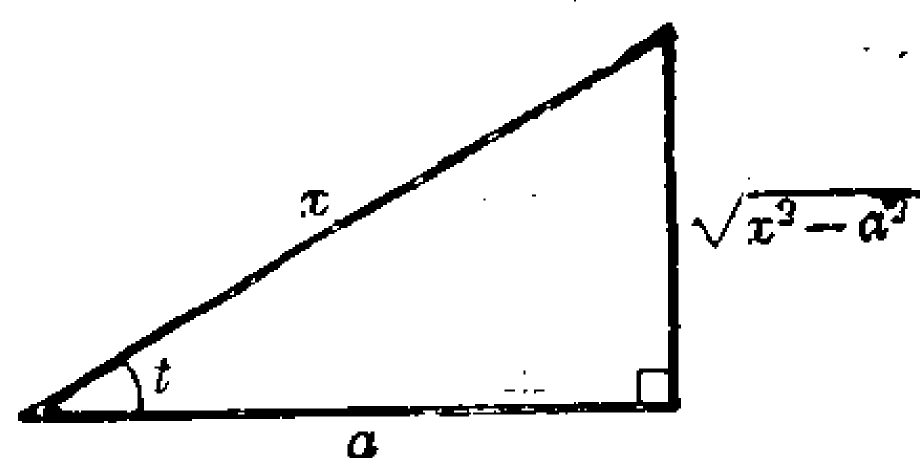


图 1-5

说明 被积函数 $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 的定义域是 $|x|>a$，即 $x>a$ 或 $x<-a$. 以上讨论的是 $x>a$(从而 $x>0$) 的情形，因此，限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$ 是合理的. 至于 $x<-a$ (从而 $x<0$) 的情形，可以先作代换 $x=-u$，于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\int\frac{-1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du$$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du\quad(u>a).$$

对于积分 $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$，因为 $u>a$，所以可以利用上面的结果，得

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C_2.$$

从而

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=-\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=-\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C_2$$

$$\xlongequal{u=-x}-\ln\left|-x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_2$$

$$=\ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+C_2$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{(-x+\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}\right|+C_2$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a^2+C_2$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C \quad (C=C_2-\ln a^2).$$

因此，不论 $x>a$ 或 $x<-a$，都有

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

为了做题简便起见，以后不必再分情形讨论，只笼统地把 x 当作正的来做就行了.

思考题 试用正割代换

$$x=a\sec t \quad (a>0)$$

证明

$$\int\frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}}=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{1}{a^3}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}+C.$$

从例 31，例 32，例 33 及几个思考题，我们看到，当被积函数中含有二次根式

$$\sqrt{a^2-x^2},\quad \sqrt{a^2+x^2},\quad \sqrt{x^2-a^2} \quad (a>0)$$

时，可分别作代换

$$x=a\sin t,\quad x=a\operatorname{tg} t,\quad x=a\sec t$$

试一试.

以上方法，有时也称为三角函数代换法. 它是消除二次式根号的一种常用方法. 当然，二次式去根号的方法并不是唯一的. 下面，我们通过例子再介绍两种方法——双曲函数代换法及倒代换法.

【例 34】 用双曲函数代换求不定积分

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0).$$

解：考虑到恒等式

$$\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1 \quad 或 \quad \operatorname{ch}^2 t-1=\operatorname{sh}^2 t,$$

我们作双曲余弦代换 $x=a\operatorname{ch} t$，于是

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\operatorname{ch}^2t-a^2}$$
$$=\sqrt{a^2(\operatorname{ch}^2t-1)}=\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2t}=a\operatorname{sh}t,$$
$$dx=d(a\operatorname{ch}t)=a\operatorname{sh}t\,dt.$$

从而

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{1}{a\operatorname{sh}t}\cdot a\operatorname{sh}t\,dt$$
$$=\int dt=t+C_1.$$

为了将变量 t 还原成 x, 需要从代换函数 $x=a\operatorname{ch}t$ 中反解出 t. 为此, 将下列两式

$$x=a\operatorname{ch}t,\quad \sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{sh}t,$$

即
$$x=a\frac{e^t+e^{-t}}{2},\quad \sqrt{x^2-a^2}=a\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

相加, 得到
$$x+\sqrt{x^2-a^2}=a\cdot e^t,$$
$$e^t=\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

从中反解出

$$t=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\ln a,$$

于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=t+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\ln a+C_1$$
$$=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C\quad(C=C_1-\ln a).$$

【例 35】 求 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}dx\quad(a>0)$.

解: 本题用正切代换 $x=a\operatorname{tg}t$, 显然是可行的. 这里要介绍的是另一种代换——倒代换.

令 $x=\frac{1}{t}$, 则

$$\frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{a^2+\frac{1}{t^2}}}=\frac{t^2}{\sqrt{\frac{a^2t^2+1}{t^2}}}$$

$$=\frac{t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{a^2t^2+1}}=\frac{t^3}{\sqrt{a^2t^2+1}},$$

$$dx=d\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}dt,$$

于是

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}\,dx\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int\frac{t^3}{\sqrt{a^2t^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{a^2t^2+1}}=-\frac{1}{2a^2}\int\frac{1}{\sqrt{a^2t^2+1}}\,d(a^2t^2+1)$$

$$=-\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2+1}+C\xlongequal{t=\frac{1}{x}}-\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+1}+C$$

$$=-\frac{1}{a^2x}\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

倒代换 $x=\frac{1}{t}$ 对于形如

$$\int\frac{1}{x\sqrt{a^2\pm x^2}}\,dx,\quad \int\frac{1}{x^2\sqrt{a^2\pm x^2}}\,dx,$$

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx,\quad \int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}\,dx,$$

$$\int\frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{x^4}\,dx,\qquad \int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx$$

等等的不定积分，都是适用的.

【例 36】 $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x-1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2\left(x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2}}d\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

$$\xlongequal{\text{例 33}}\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{4}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{4}+\sqrt{x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}\right|+C.$$

以上我们学习了两种换元法，所用的公式是：

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)]$$

$$\xlongequal{\text{令}\varphi(x)=u}\int f(u)du\xlongequal{\text{查表}}F(u)+C$$

$$\xlongequal{u=\varphi(x)}F[\varphi(x)]+C \tag{3}$$

和

$$\int f(x)dx\xlongequal{\text{令}x=\varphi(t)}\int f[\varphi(t)]d[\varphi(t)]$$

$$=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt\xlongequal{\text{查表}}\Phi(t)+C$$

$$\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)}\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C. \tag{4}$$

不论(3)或(4)，它们都是与微分法则中复合函数求导公式相对应的．这是两种换元法的共同点．那么，它们的不同点是什么呢？

如果说第一换元法的特点是把被积表达式中的某个函数换成一个变量(即令 $\varphi(x)=u$. 这可看作是一种简化), 那么, 第二换元法却是把一个变量换成一个函数(即令 $x=\varphi(t)$. 这在形式上是一种繁化). 不论简化还是繁化, 目的都是把所求积分化为可以查表(或有现成结果)的情形.

习 题 四

1. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; (2) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}dx$;

(3) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx$; (4) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$;

(5) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$; (6) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx$;

(7) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$; (8) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

(9) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$; (10) $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(11) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx$.

2. 用倒代换求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx$; (2) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}dx$;

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx$; (4) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx$.

3. 用以下几种代换求积分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$:

(1) $x=\sec t$; (2) $x=\csc t$;

(3) $x=\dfrac{1}{t}$; (4) $x=\operatorname{ch} t$;

(5) 令 $\sqrt{x^2-1}=t$, 即 $x=\sqrt{t^2+1}$.

4．用以下几种代换求积分 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}dx$:

(1) $x=\frac{1}{t}$; (2) $x=a\,\mathrm{tg}\,t$;

(3) $x=a\,\mathrm{sh}\,t$.

5．求下列不定积分:

(1) $\int \frac{x^3}{(x-1)^{12}}dx$; (2) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$;

(3) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

6．求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$; (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$;

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; (4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$;

(5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$; (6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-4}}$;

(7) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$; (8) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$;

(9) $\int \frac{dx}{1+2\sqrt{x-x^2}}$.

2.4 分部积分法

运用两个简单法则及换元积分法，我们已经能计算大量的不定积分．但是，还有几类经常要用的积分，例如：

$$\int x\cos x\,dx,\quad \int xe^x\,dx,\quad \int x\ln x\,dx,\quad \int e^x\sin x\,dx,$$

$$\int \arcsin x\,dx,\quad \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx,\quad \int \frac{1}{\sin^n x}dx$$

等等，还不会计算．为了计算它们，需要利用分部积分法．

分部积分法是微分学中两个函数乘积的求导法则的逆转．

定理(分部积分法) 设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 都是可微函数,并且 $u'(x)\cdot v(x)$ 及 $u(x)\cdot v'(x)$ 都有原函数,则有分部积分公式

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx,$$

或

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu. \tag{7}$$

【证】 在函数乘积的求导公式

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

两边求不定积分,根据 $\int f'(x)dx=f(x)+C$, 得

$$u(x)\cdot v(x)=\int u'(x)\cdot v(x)dx+\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

(左端的积分常数合并到右端的不定积分中). 移项,便得到分部积分公式

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx,$$

或
$$\int udv=u\cdot v-\int vdu. \quad \blacksquare$$

运用公式(7)时,应先适当选取函数 u 及微分 dv, 把所求积分化为 $\int udv$ 的形式,然后转化为去求积分 $\int vdu$, 而这后一个积分应当是比较容易求的.

【例 37】 求 $\int x\cos x dx$.

解: 先把积分 $\int x\cos x dx$ 改写成 $\int xd(\sin x)$, 即选取 $u=x$, $v=\sin x$. 再根据分部积分公式(7),就有

$$\int x\cos x\,dx = \int \underset{u}{\underset{\uparrow}{x}}\, d(\underset{v}{\underset{\uparrow}{\sin x}}) \xlongequal{(7)} \underset{u}{\underset{\uparrow}{x}}\,\underset{v}{\underset{\uparrow}{\sin x}} - \int \underset{v}{\underset{\uparrow}{\sin x}}\, d\underset{u}{\underset{\uparrow}{x}}$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

【例 38】 求 $\int xe^x dx$.

解：先把积分 $\int xe^x dx$ 改写成 $\int xd(e^x)$，即选取 $u=x$，$v=e^x$，再根据公式(7)，便有

$$\int xe^x dx = \int \underset{u}{\underset{\uparrow}{x}}\, d(\underset{v}{\underset{\uparrow}{e^x}}) = \underset{u}{\underset{\uparrow}{x}}\cdot \underset{v}{\underset{\uparrow}{e^x}} - \int \underset{v}{\underset{\uparrow}{e^x}}\, d\underset{u}{\underset{\uparrow}{x}}$$

$$= x\cdot e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

当然，初学者也可能先把积分 $\int xe^x dx$ 改写成了 $\int e^x d\left(\frac{x^2}{2}\right)$，然后代入公式(7)，即

$$\int xe^x dx = \int \underset{u}{\underset{\uparrow}{e^x}}\, d\left(\underset{v}{\underset{\uparrow}{\frac{x^2}{2}}}\right) \xlongequal{(7)} \underset{u}{\underset{\uparrow}{e^x}}\cdot \underset{v}{\underset{\uparrow}{\frac{x^2}{2}}} - \int \underset{v}{\underset{\uparrow}{\frac{x^2}{2}}}\, d(\underset{u}{\underset{\uparrow}{e^x}})$$

$$= \frac{x^2e^x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2e^x dx.$$

由于化出来的积分 $\int x^2e^x dx$ 比原来要求的 $\int xe^x dx$ 更为复杂，因此这种选取 u, v 的方法是不成功的.

那么，到底应当怎样选取 u 和 v 呢?

观察公式(7)：

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

它把所要求的积分 $\int u\,dv$ 转化成积分 $\int v\,du$，在这里，u 要经历微分过程，dv 要经历积分过程. 因此，一般说来，充当 dv

的那个量应当是便于积分的，而充当 u 的那个量，微分以后应当较前简单，以便使新积分 $\int v\,du$ 容易求出.

【例 39】 求 $\int x\ln x\,dx$.

解：先把积分改写为

$$\int x\ln x\,dx=\int \ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

即取 $u=\ln x$, $v=\frac{x^2}{2}$. 由分部积分公式(7)，得

$$\int x\ln x\,dx=\int \ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)\overset{(7)}{=\!=}\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\,d(\ln x)$$

$$\overset{\text{把}d(\ln x)\text{微出来}}{=\!=\!=\!=}\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C.$$

当被积函数不是两个函数的乘积，而是一个函数，例如 $\ln x$, $\arcsin x$, $\sqrt{x^2\pm a^2}$, …时，也常用分部积分法.

【例 40】 求 $\int \arcsin x\,dx$.

解：设 $u=\arcsin x$, $dv=dx$, 即 $v=x$, 则

$$\int\arcsin x\,dx\overset{(7)}{=\!=}x\cdot\arcsin x-\int x\,d(\arcsin x)$$

$$\overset{\text{微出来}}{=\!=\!=}x\cdot\arcsin x-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=x\cdot\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

【例 41】 求 $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx \quad (a>0)$.

解：设 $u=\sqrt{x^2+a^2}$,

$$dv=dx,$$

即 $v=x$,

则

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx \xlongequal{(7)} x\cdot\sqrt{x^2+a^2}-\int x\,d(\sqrt{x^2+a^2})$$

$$\xlongequal{\text{微出来}} x\cdot\sqrt{x^2+a^2}-\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$=x\cdot\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$=x\cdot\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx+a^2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$=x\cdot\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

$$+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C_1$$

（这里我们引用了第二换元法中例32的结果）．积分 $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ 虽然没有直接算出来，但是得到了关于它的一个方程式，移项后，便能将它解出来：

$$2\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\cdot\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C_1,$$

于是

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}$$

$$+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C \quad \left(C=\frac{C_1}{2}\right).$$

思考题 证明

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}$$
$$-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C\quad(a>0).$$

从以上各例，我们看到，运用分部积分公式(7)求积分时，一般分为四步：

第一步．“选 u, v”．即选取 u, v, 把所求积分 $\int u\cdot v'\,dx$ 改写成 $\int u\,dv$;

第二步．“代公式”．即利用公式(7)，化出一个新的积分 $\int v\,du$, 它与所求积分 $\int u dv$ 相比，不过是把 u, v 互换了位置;

第三步．“微出来”．即把化出的新积分 $\int v\,du$ 中的 du 微出来，使之成为 $\int v\cdot u'\,dx$, 以便计算;

第四步．算积分 $\int v\cdot u'\,dx$.

这四步中，关键是如何选取 u 和 v.

应当指出，对于某些不定积分，有时需要连续几次运用公式(7)．

【例 42】 求 $\int x^2\cos x\,dx$.

解：$\int x^2\cdot\cos x\,dx \xlongequal{\text{选 }u,\,v} \int x^2\,d(\sin x)$

$$\xlongequal{\text{代公式}} x^2\cdot\sin x-\int\sin x\,d(x^2)$$

$$\xlongequal{\text{微出来}} x^2\cdot\sin x-2\int x\cdot\sin x\,dx,$$

对于后一个积分 $\int x\sin x\,dx$, 先改写成 $\int x d(-\cos x)$, 然后再

用一次公式(7)，便有

$$\int x\sin x\,dx=\int x d(-\cos x)$$

$$\xlongequal{(7)} x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$

$$=-x\cos x+\sin x+C_1,$$

代入上式，得到

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\cdot\sin x-2(-x\cos x+\sin x+C_1)$$

$$=x^2\cdot\sin x+2x\cdot\cos x-2\sin x+C$$

$$(C=-2C_1).$$

【例 43】 求 $\int e^x\sin x\,dx$.

解: $\int e^x\sin x\,dx \xlongequal{选 u, v} \int\sin x\,d(e^x)$

$$\xlongequal{代公式} e^x\cdot\sin x-\int e^x\,d(\sin x)$$

$$\xlongequal{微出来} e^x\cdot\sin x-\int e^x\cos x\,dx,$$

对于积分 $\int e^x\cos x\,dx$，再用一次分部积分公式:

$$\int e^x\cdot\cos x\,dx \xlongequal{选 u, v} \int\cos x\,d(e^x)$$

$$\xlongequal{代公式} e^x\cdot\cos x-\int e^x\,d(\cos x)$$

$$\xlongequal{微出来} e^x\cdot\cos x+\int e^x\sin x\,dx,$$

代入上式，得

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx.$$

与例 41 类似，这里又得到了关于所求积分 $\int e^x \cdot \sin x\,dx$ 的一个方程式．把方程右端的积分移到左端，得

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + C_1$$

(由于此式左端为不定积分，因此右端须补上任意常数 C_1)，从而

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C \quad \left(C = \frac{C_1}{2}\right).$$

【例 44】 求积分

$$I_1 = \int e^{ax} \sin bx\,dx, \qquad I_2 = \int e^{ax} \cos bx\,dx.$$

解：对这两个积分 I_1，I_2，分别利用分部积分公式(7)，有

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{1}{a}\int \sin bx\,d(e^{ax}) \\
&\overset{(7)}{=\!=} \frac{1}{a}\left[e^{ax} \cdot \sin bx - \int e^{ax} d(\sin bx)\right] \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cdot \cos bx\,dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b}{a} I_2; \\
I_2 &= \int e^{ax} \cdot \cos bx\,dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\,d(e^{ax}) \\
&\overset{(7)}{=\!=} \frac{1}{a}\left[e^{ax} \cdot \cos bx - \int e^{ax} d(\cos bx)\right] \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \cdot \sin bx\,dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a} I_1.
\end{aligned}$$

于是得到两个关于 I_1, I_2 的方程式:

$$I_1=\frac{1}{a}e^{ax}\cdot\sin bx-\frac{b}{a}I_2,$$

$$I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\cdot\cos bx+\frac{b}{a}I_1.$$

即
$$\begin{cases}aI_1+bI_2=e^{ax}\cdot\sin bx+C_1,\\ aI_2-bI_1=e^{ax}\cdot\cos bx+C_2.\end{cases}$$

解此联立方程组,得

$$I_1=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C\quad\left(C=\frac{aC_1-bC_2}{a^2+b^2}\right);$$

$$I_2=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C\quad\left(C=\frac{bC_1+aC_2}{a^2+b^2}\right),$$

即
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C.$$

总结以上各例,我们看出:

① 如果被积函数是两个函数的乘积,或是一个较复杂的函数,例如

$$\int x^ne^{ax}\,dx,\quad \int x^n\sin ax\,dx,\quad \int x^n\cos ax\,dx,\quad \int x^n\ln x\,dx,$$

$$\int x^n\arcsin x\,dx,\quad \int x^n\operatorname{arc\,tg} x\,dx,\quad \int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad \int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx,\quad \int\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\,dx$$

等等,那么,都可用分部积分法试一试.

② 有时一个积分需要连续几次运用分部积分公式(7)才能算出来.

在连续运用公式(7)时,每一次选作 u 及 v 的函数,一般说来必须是同类函数(比如在例 43 中,两次都选三角函数为

u，而选指数函数 e^x 为 v）．不然的话，做两次分部积分之后，就会出现恒等式

$$\int u\,dv=\int u\,dv,$$

等于没有工作．这正好象走路一样，往前走了一步，又从原路退回一步，结果仍在原处未动．这是我们运用分部积分公式(7)时，需要特别注意的．

利用分部积分公式(7)，还能导出一些很有用的递推公式．

【例 45】 求 $\int \sin^n x\,dx$ （n是正整数）．

解：当 $n=1, 2$，则积分为

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C,$$

$$\int \sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x+C.$$

因此，只需讨论 $n\geqslant 3$．我们利用分部积分公式(7)：

$$\int \sin^n x\,dx=\int \sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx=\int \sin^{n-1}x\,d(-\cos x)$$

$$\overset{(7)}{=\!=}\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)\,d(\sin^{n-1}x)$$

$$\overset{\text{微出来}}{=\!=}-\sin^{n-1}x\cdot\cos x+\int\cos x\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x+(n-1)\int\cos^2 x\cdot\sin^{n-2}x\,dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x+(n-1)\int(1-\sin^2 x)\cdot\sin^{n-2}x\,dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx$$

$$-(n-1)\int\sin^n x\,dx,$$

将等式右端的$(n-1)\int \sin^n x\,dx$移到左端，得

$$[1+(n-1)]\int \sin^n x\,dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx,$$

于是

$$\int \sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cdot\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx \quad (n\geqslant 3). \tag{8}$$

(8)称为递推公式. 虽然积分$\int \sin^n x\,dx$没有具体求出来，但每用一次公式(8)，n就降低两次，连续运用，最后就得到积分$\int \sin^2 x\,dx$或$\int \sin x\,dx$，从而使问题得到解决. 这也就是"递推"的意思.

例如$n=4$时，有

$$\int \sin^4 x\,dx\xlongequal{(8)}-\frac{1}{4}\sin^3 x\cdot\cos x+\frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cdot\cos x+\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cdot\cos x+\frac{3}{8}(x-\sin x\cdot\cos x)+C.$$

$n=5$时，有

$$\int \sin^5 x\,dx\xlongequal{(8)}-\frac{1}{5}\sin^4 x\cdot\cos x+\frac{4}{5}\int \sin^3 x\,dx$$

$$\xlongequal{(8)}-\frac{1}{5}\sin^4 x\cdot\cos x$$

$$+\frac{4}{5}\left[-\frac{1}{3}\sin^2 x\cdot\cos x+\frac{2}{3}\int \sin x\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cdot\cos x-\frac{4}{15}\sin^2 x\cdot\cos x-\frac{8}{15}\cos x+C.$$

思考题 1 当 n 为奇数，即 $n=2k-1(k=1, 2, \cdots)$ 时，不利用递推公式(8)，怎样直接求积分

$$\int \sin^n x\,dx=\int \sin^{2k-1} x\,dx ?$$

又，当 n 为偶数行吗？

思考题 2 证明递推公式

$$\int \cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\cdot\sin x+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx \quad (n\geqslant 3). \tag{9}$$

【例 46】 求 $\int \frac{1}{\sin^n x}dx$ （n 是正整数）.

解：当 $n=1$，则 $\int \frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$,

当 $n=2$，则 $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg} x+C$.

因此只需讨论 $n\geqslant 3$ 的情形．我们仍用分部积分法．

$$\int \frac{1}{\sin^n x}dx=\int \frac{1}{\sin^{n-2}x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx=\int \frac{1}{\sin^{n-2}x}d(-\operatorname{ctg} x)$$

$$\overset{(7)}{=\!=}-\frac{1}{\sin^{n-2}x}\cdot\operatorname{ctg} x-\int(-\operatorname{ctg} x)d\left(\frac{1}{\sin^{n-2}x}\right)$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\int \operatorname{ctg} x\cdot\frac{-(n-2)\sin^{n-3}x\cdot\cos x}{\sin^{2n-4}x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}-(n-2)\int \frac{\sin^{n-3}x\cdot\cos^2 x}{\sin^{2n-3}x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}-(n-2)\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}-(n-2)\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}-(n-2)\int \frac{1}{\sin^n x}dx+(n-2)\int \frac{1}{\sin^{n-2}x}dx,$$

将等式右端的 $-(n-2)\int\frac{1}{\sin^n x}dx$ 移到左端，得

$$[1+(n-2)]\int\frac{1}{\sin^n x}dx=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+(n-2)\int\frac{1}{\sin^{n-2}x}dx,$$

于是

$$\int\frac{1}{\sin^n x}dx=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{1}{\sin^{n-2}x}dx \quad (n\geqslant 3). \tag{10}$$

例如 $n=3$ 时，有

$$\int\frac{1}{\sin^3 x}dx\overset{(10)}{=\!=}-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

思考题 证明递推公式

$$\int\frac{1}{\cos^n x}dx=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{1}{\cos^{n-2}x}dx \quad (n\geqslant 3). \tag{11}$$

当 $n=3$ 时，公式(11)即为

$$\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C.$$

这个结果，以后我们作习题时经常会碰到。

【例 47】 求 $\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ $(a>0,\ n$ 是正整数$)$。

解： 设 $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$，$dv=dx$，则

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx\overset{(7)}{=\!=}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\,d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right]$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\,d\left[(x^2+a^2)^{-n}\right]$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x(-n)(x^2+a^2)^{-n-1} \cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

$$- 2na^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx,$$

将 $2na^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$ 移到等式左端，而将左端 $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ 移到右端，得

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

(n 是正整数，即 $n=1, 2, \cdots$)。

此式可改写为

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$+ \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)a^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{(2n-2)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$+ \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx$$

($n=2, 3, \cdots$)。

于是得到递推公式

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{(2n-2)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$+ \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \cdot \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx$$

$$(n=2,3,\cdots). \qquad (12)$$

每用一次递推公式(12)，n 就降低一次，最后出现的积分是 $n=1$ 的情形

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C,$$

从而问题得到解决.

例如 $n=2$ 时, 有

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx \xlongequal{(12)} \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{1}{x^2+a^2}dx$$

$$=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)+C.$$

$n=3$ 时, 有

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^3}dx \xlongequal{(12)} \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$+\frac{3}{4a^2}\cdot\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)+C$$

$$=\frac{1}{4a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)\right]+C.$$

分部积分法有时还与换元法结合使用.

【例 48】 求 $\int\frac{\operatorname{arc\,tg} e^x}{e^x}dx$.

解：设 $e^x=t$, 即 $x=\ln t$, 则

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} e^x}{e^x}=\frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t},$$

$$dx=d(\ln t)=\frac{1}{t}dt,$$

于是

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tg} e^x}{e^x}dx \xlongequal{\text{换元}} \int \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^2}dt = \int \operatorname{arc\,tg} t\, d\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} -\frac{1}{t}\operatorname{arc\,tg} t - \int\left(-\frac{1}{t}\right)d(\operatorname{arc\,tg} t)$$

$$= -\frac{1}{t}\operatorname{arc\,tg} t + \int \frac{1}{t(1+t^2)}dt$$

$$= -\frac{1}{t}\operatorname{arc\,tg} t + \int \frac{(1+t^2)-t^2}{t(1+t^2)}dt$$

$$= -\frac{1}{t}\operatorname{arc\,tg} t + \int\left[\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right]dt$$

$$= -\frac{1}{t}\operatorname{arc\,tg} t + \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$$

$$\xlongequal{t=e^x} -\frac{1}{e^x}\operatorname{arc\,tg} e^x + x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C.$$

习 题 五

1．求下列不定积分：

(1) $\int x\sin x\,dx$;　　(2) $\int x\cos 3x\,dx$;

(3) $\int x\sin^2\frac{x}{2}dx$;　　(4) $\int xe^{-x}dx$;

(5) $\int (x-1)e^x dx$;　　(6) $\int (x^2+x)e^{-x}dx$;

(7) $\int x\sec^2 x\,dx$;　　(8) $\int x\arcsin x\,dx$;

(9) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$;　　(10) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}dx$;

(11) $\int (x^2+x)\ln(1+x)dx$;　　(12) $\int x^n\ln x\,dx$　(n是正整数);

(13) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;　　(14) $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

(15) $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)\,dx$;　　(16) $\int e^{x} \sin^{2} x\,dx$;

(17) $\int x^{2} e^{3x}\,dx$;　　(18) $\int x^{2} \cos nx\,dx$;

(19) $\int (x^{2}+1)\cos^{2} x\,dx$;　　(20) $\int x^{2} \operatorname{arc\,tg} x\,dx$;

(21) $\int x^{2} \operatorname{sh} x\,dx$;　　(22) $\int \sqrt{x} \ln^{2} x\,dx$;

(23) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{3} dx$;　　(24) $\int \frac{x^{2} e^{x}\,dx}{(x+2)^{2}}$;　　(25) $\int \frac{x e^{x}}{(x+1)^{2}}\,dx$.

2. 求下列不定积分:

(1) $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$;　　(2) $\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\,dx$;

(3) $\int \ln^{2} x\,dx$;　　(4) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^{2}})\,dx$;

(5) $\int (\arcsin x)^{2}\,dx$;　　(6) $\int \sin(\ln x)\,dx$.

3. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\ln \ln x}{x}\,dx$;　　(2) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$;

(3) $\int x \sin\sqrt{x}\,dx$;　　(4) $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^{2})^{3/2}}\,dx$;

(5) $\int \frac{x^{2} \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^{2}}\,dx$;　　(6) $\int x(\operatorname{arc\,tg} x)^{2}\,dx$;

(7) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^{2})^{3}}}\,dx$;　　(8) $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin x \cdot \cos x}\,dx$;

(9) $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin^{2} x \cdot \cos^{2} x}\,dx$.

4. 求 $\int x e^{x} \sin x\,dx$.

5. 有一火箭用液氧加液氢作燃料, 其喷气速度可达 $v_e=4$ 公里/秒, 火箭起飞时的质量为 $M_0=14000$ 千克, 在飞行过程中, t 时刻的质量为 $M(t)=(14000-70t)$ 千克. 根据动量守恒定律, 知火箭在飞行中的速度为 $v(t)=-gt-v_e \ln \frac{M(t)}{M_0}$. 试求 $t=100$ 秒时, 火箭飞过的路程.

第三节　简单初值问题——不定积分的简单应用

3.1　简单初值问题

在第一节第三段，我们曾说过，一个函数的原函数有无穷多个，它们彼此之间相差一个常数．但是，在许多问题中，我们感兴趣的往往并不是这无穷多个原函数的全体(不定积分)，而是某一个特定的原函数，在几何上，就是一条特定的积分曲线．在第一节第三段，我们也看到，为了求得这条积分曲线，必须知道它所经过的一个点，也就是说，要知道初始条件．这种求满足一定初始条件的积分曲线的问题，就属于我们下面所要说的简单初值问题．在物理学、力学和其它学科以及大量的实际问题中，这一类简单初值问题是很多的．我们再举一个简单的例子．

假设某物体受重力作用自由下落，在时刻 t 的速度是 gt (g 是重力加速度)，试求物体的运动规律

$$S=S(t).$$

取坐标系如图 1-6：将物体在初始时刻的位置取为坐标原点，S 轴垂直向下．由于速度是路程对时间的导数，因此有

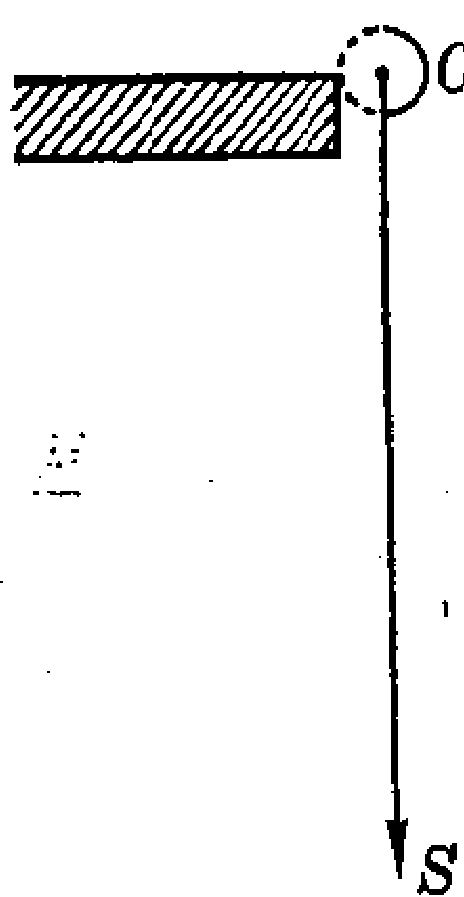


图　1-6

$$S'(t)=gt.$$

为了求得运动规律 $S(t)$，对上式求不定积分：

$$S(t)=\frac{1}{2}gt^2+C. \tag{1}$$

这里 C 是积分常数，是待定的．为了确定

C，我们考虑初始条件，这里，就是指物体在初始时刻的位移（也叫做初位移）：

$$S|_{t=0}=0.$$

将初始条件代入(1)式，得

$$0=0+C,$$

即

$$C=0.$$

从而得到

$$S(t)=\frac{1}{2}gt^2.$$

这正是大家所熟知的自由落体的运动规律。

归纳起来，这个问题可以提成求解如下的简单初值问题：

$$\begin{cases} S'(t)=gt, \\ S|_{t=0}=0. \end{cases}$$

一般说来，所谓简单初值问题，是指：已知函数 $y(x)$ 的导数为 $f(x)$，并且已知一对常数 x_0，y_0，要求函数 $y(x)$，使其满足

$$\begin{cases} y'(x)=f(x), & (2) \\ y|_{x=x_0}=y_0. & (3) \end{cases}$$

这里，$y|_{x=x_0}=y_0$ 称为初始条件。

对上例而言，$x=t$，$f(x)=gt$，$y(x)=S(t)$，$x_0=0$，$y_0=0$。但是，一般说来，初始值 $x=x_0$ 可以不是 0，也就是说，初始条件并不一定必须在 $x=0$ 点给出。

回顾前面第一节第三段的讨论，可以说，求解简单初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x), \\ y|_{x=x_0}=y_0, \end{cases}$$

在几何上，就是求 $f(x)$ 的一条通过定点 (x_0, y_0) 的积分曲线。这也就是简单初值问题的解的几何意义。

3.2 简单初值问题的解的唯一性和存在性

对于任意给定的函数 $f(x)$ 和一对常数 x_0, y_0, 简单初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x), \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases} \tag{4}$$

是否一定有解 $y=y(x)$? 又如果有解, 会不会有好几个解? 这是我们非常关心的两个问题. 这就是简单初值问题解的存在性与唯一性的问题.

关于解的存在性问题, 我们有

定理 1 设 $f(x)$ 是连续函数, 则初值问题(4)必定有解.

这个定理此处暂不证明, 留到第三章再讲. 但是, 我们可以告诉大家: 如果 $f(x)$ 不连续, 那么它就可能没有原函数, 因而初值问题也就没有解. 这里只要举一个例子就行了.

【例 1】 设有函数

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0; \\ 0, & x=0; \\ 1, & x>0. \end{cases} \tag{5}$$

这个函数在 $x=0$ 点是不连续的. 我们想说明它没有原函数. 利用反证法.

假定 $f(x)$ 有原函数, 即有函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x)=f(x), \quad -\infty<x<+\infty.$$

根据当 $x<0$ 时, $f(x)=-1$, 有

$$F(x)=-x+C_1, \quad x<0, \ C_1 \text{是常数}. \tag{6}$$

又由当 $x>0$ 时, $f(x)=1$, 有

$$F(x)=x+C_2, \quad x>0, \ C_2 \text{是常数}. \tag{7}$$

但是, $F(x)$ 既是 $f(x)$ 的原函数, 就必定是可微函数, 从而

必定是连续函数，特别说来，$F(x)$应该在$x=0$点连续，因此，函数值与左、右极限值应相等，即有

$$F(0)=F(+0)=F(-0).$$

由(6)式和(7)式，知

$$F(-0)=C_1, \quad F(+0)=C_2,$$

因而 $C_1=C_2$，不妨都记作C.

从而 $F(0)=C$.

于是得到

$$F(x)=\begin{cases} -x+C, & x<0; \\ C, & x=0; \\ x+C, & x>0. \end{cases}$$

即 $F(x)=|x|+C$.

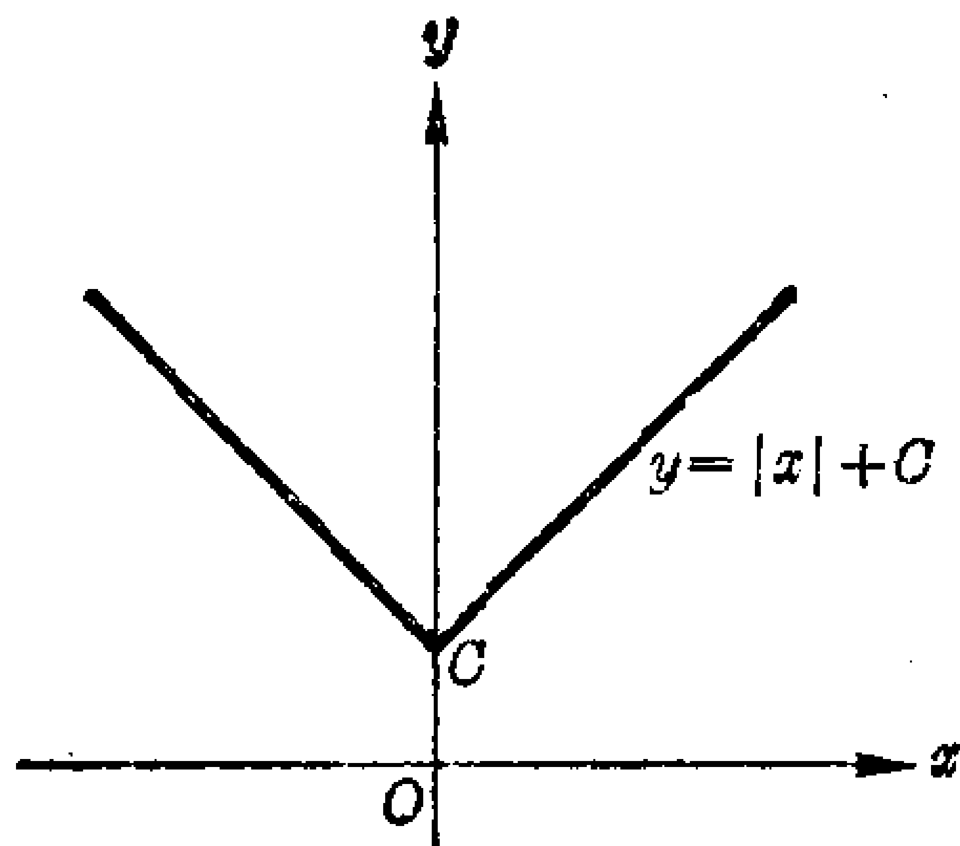


图 1-7

不难理解：不论C是什么常数，函数$F(x)$在$x=0$点都是不可微的(事实上，$y=|x|+C$的图形在$x=0$处对应一个尖点，见图1-7)，也就是说，它不可能是某个函数的原函数，从而与假设矛盾．这个矛盾表明了函数$f(x)$没有原函数．

这个例子说明：不连续的函数，可能没有原函数，因而对应的初值问题也就没有解．而定理1则从正面回答了简单初值问题的解在什么条件下必定存在的问题．当然，定理1所给出的，只是解存在的一个充分条件，并不是必要条件．

下面讨论第二个问题——简单初值问题的解的唯一性问题．我们有

定理2 简单初值问题(4)至多只有一个解．

【证】 假设函数$F(x)$、$G(x)$都是(4)的解，我们来证明：$F(x)\equiv G(x)$.

由于$F(x)$，$G(x)$都满足初值问题(4)，所以有

$$\begin{cases} F'(x)=f(x), \\ F(x_0)=y_0, \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} G'(x)=f(x), \\ G(x_0)=y_0. \end{cases}$$

令 $$u(x)=F(x)-G(x),$$

则有 $$u'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

$$u(x_0)=F(x_0)-G(x_0)=y_0-y_0=0.$$

也就是说，$u(x)$满足：

$$\begin{cases} u'(x)=0, & (8) \\ u(x_0)=0. & (8') \end{cases}$$

由(8)式，知 $u(x)\equiv C$ （C 为常数）.

再由(8′)式，知 $u(x_0)\equiv C=0$.

即 $C=0$，从而 $u(x)\equiv 0$.

也就是 $F(x)\equiv G(x)$. 】

这个定理告诉我们：简单初值问题的解如果存在的话，那么必定是唯一的.

3.3 简单初值问题的解的求法

从简单初值问题解的唯一性，我们不难看出一种求解初值问题的方法.

一般说来，求解简单初值问题(4)，可分为两步进行：

① 先解方程(2)，求得 $f(x)$ 的全体原函数(我们常常称它为方程(2)的通解)：

$$y=F(x)+C. \tag{9}$$

这一步就是求已给函数 $f(x)$ 的不定积分. 对此，我们已经在第二节进行了相当多的讨论.

② 利用初始条件(3)，确定常数 C. 将初始条件

$y|_{x=x_0}=y_0$ 代入(9)式，便得到

$$C=y_0-F(x_0).$$

最后，得到初值问题(4)的解(称为特解)

$$y(x)=F(x)+[y_0-F(x_0)].$$

【例 2】 求解初值问题

$$\begin{cases} y'=3t^2+5t, & (10)\\ y(0)=4. & (11)\end{cases}$$

解：① 解方程(10)，求得函数 $3t^2+5t$ 的不定积分，也就是方程(10)的通解：

$$y=t^3+\frac{5}{2}t^2+C. \qquad (12)$$

② 确定常数 C：

将初始条件(11)代入(12)式，得到

$$4=0+0+C,$$

即

$$C=4.$$

于是得到初值问题的解(即特解)

$$y(t)=t^3+\frac{5}{2}t^2+4.$$

【例 3】 求解初值问题

$$\begin{cases} y'=E\sin\omega t, & (13)\\ y(t_0)=b. & (14)\end{cases}$$

这里 E, ω, b 都是常数.

解：① 解方程(13)，求得函数 $E\sin\omega t$ 的不定积分(即方程(13)的通解)：

$$y=-\frac{E}{\omega}\cos\omega t+C. \qquad (15)$$

② 确定常数 C：

将初始条件(14)代入(15)式，得到

$$b=-\frac{E}{\omega}\cos\omega t_0+C,$$

即

$$C=b+\frac{E}{\omega}\cos\omega t_0.$$

于是得到初值问题的解(即特解)

$$y(t)=b+\frac{E}{\omega}(\cos\omega t_0-\cos\omega t).$$

【例 4】 求解初值问题

$$\begin{cases} y'=|x|, & (16)\\ y(-2)=a. & (17)\end{cases}$$

这里 a 是一个常数.

解: ① 解方程(16)，求得函数 $f(x)=|x|$ 的不定积分(即方程(16)的通解).

由于 $f(x)=|x|$ 是连续函数，所以有原函数(第三章将证明). 但是，$f(x)$ 是一个分段函数:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

怎样对它求不定积分呢?

我们分段考虑.

由 $f(x)=x$, $x>0$, 知不定积分为

$$y=\frac{x^2}{2}+C_1,\quad x>0,\ C_1\text{是常数};$$

再由 $f(x)=-x$, $x<0$, 知不定积分为

$$y=-\frac{x^2}{2}+C_2,\quad x<0,\ C_2\text{是常数}.$$

但是，原函数是可微函数，因而是连续函数，利用 $x=0$ 处的连续性，知有

$$y(0)=y(+0)=y(-0).$$

即
$$y(0)=C_1=C_2 \xlongequal{\text{记作}} C.$$

于是，得到方程(16)的通解：

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+C, & x>0;\\ C, & x=0;\\ -\dfrac{x^2}{2}+C, & x<0.\end{cases}$$

② 确定常数 C：

将初始条件(17)代入通解：

由于初始条件是在 $x_0=-2$ 处给出的，因此应代入第三个式子：

$$a=-\frac{(-2)^2}{2}+C,$$

即
$$C=a+2.$$

于是得到初值问题的解(即特解)

$$y(x)=\begin{cases}a+2+\dfrac{x^2}{2}, & \text{当 } x\geqslant 0;\\ a+2-\dfrac{x^2}{2}, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

这也是一个分段函数.

习 题 六

1. 一曲线过原点，且曲线上任意一点的切线的斜率等于$\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$，求此曲线的方程.
2. 一质点作直线运动，已知速度为 $v=(t-1)e^t$，并且当 $t=0$ 时，路程 $S=1$，求质点的运动规律.
3. 解下列初值问题：

(1) $\begin{cases} y'=10^x, \\ y|_{x=0}=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=E\cos(\omega t+\varphi), \\ u|_{t=0}=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y'=\dfrac{1}{x}+x^2, \\ y|_{x=-1}=2; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} y'=|x-2|, \\ y|_{x=1}=2. \end{cases}$

第一章小结

我们已经学习了不定积分的概念与计算. 这部分属于积分学的第一个基本问题. 为了帮助大家灵活地、融汇贯通地掌握并运用它们,下面作一个小结.

1. 概念

① 原函数与不定积分的关系:

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

即原函数的全体就是不定积分.

② 不定积分与导数是两个互逆的概念:

$$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x),\quad 或\quad d\int f(x)dx=f(x)dx;$$

$$\int f'(x)dx=f(x)+C,\quad 或\quad \int d\,f(x)=f(x)+C.$$

微分法的一般法则	积分法的一般法则
"加、减": $(u\pm v)'=u'\pm v'.$	两个简单法则: $\int(u\pm v)dx=\int u\,dx\pm\int v\,dx.$
"乘": $\begin{cases}(C\cdot u)'=C\cdot u' \ (C 是常数). \\ (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'.\end{cases}$	$\int C\cdot u\,dx=C\int u\,dx$ $(C\neq 0$ 为常数). 分部积分法则:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du.$$

"除"：$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

（无对应）

"复合"：设 $y=F(u)$ 可微，且 $F'(u)=f(u)$，又 $u=\varphi(x)$ 可微，则

$$\{F[\varphi(x)]\}'_x = F'(u)\cdot u'_x = f(u)\cdot\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

换元积分法则：

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = \int f(u)du = F(u)+C = F[\varphi(x)]+C.$$

2．常用积分表

基本积分表中有11个积分公式．后来，随着几个积分法则的学习，又导出了一些可作为积分公式的重要结果．合在一起，共有35个公式．为了便于查用，我们把它们按被积函数的类型罗列在下面，称为常用积分表．

常用积分表

① $\int 0\,dx = C.$

② $\int x^{\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, & \alpha\neq -1; \\ \ln|x|+C, & \alpha=-1. \end{cases}$

特别地，有

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C.$$

③ $\int e^x dx = e^x + C.$

④ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

⑤ $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C.$

⑥ $\int \log_a x \, dx = x\left(\log_a x - \frac{1}{\ln a}\right) + C.$

⑦ $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

⑧ $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

⑨ $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C.$

⑩ $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C.$

⑪ $\int \sec x \, dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

⑫ $\int \csc x \, dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C$

$$= \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

⑬ $\int \sec^2 x \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$

⑭ $\int \csc^2 x \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

⑮ $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

⑯ $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

⑰ $\int \sin mx \cdot \sin nx\,dx$

$= -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n).$

⑱ $\int \cos mx \cdot \cos nx\,dx$

$= \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n).$

⑲ $\int \sin mx \cdot \cos nx\,dx$

$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n).$

⑳ $\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

㉑ $\int \arccos x\,dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

㉒ $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

㉓ $\int e^{ax} \cdot \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$

㉔ $\int e^{ax} \cdot \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b \sin bx + a \cos bx) + C.$

㉕ $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

㉖ $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$

㉗ $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|+C.$

㉘ $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$

㉙ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C.$

㉚ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$

㉛ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

㉜ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$

㉝ $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$

㉞ $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

㉟ $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

3. 学会查常用积分表

以上35个积分公式是基本而常用的．在许多情形下，都是设法把一个积分化成可以查常用积分表的形式．为了帮助读者熟悉它们，下面举几个例子．

【例 1】 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}}d(x+1)$$

$$\xlongequal{\text{公式㉜}} \ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\right|+C$$

$$=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C.$$

【例 2】 $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\int\frac{(x+1)-1}{\sqrt{(x+1)^2+2}}\,dx$

$$=\int\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+2}}\,d(x+1)-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$\xlongequal{\text{由例 1}} \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2}}\,d[(x+1)^2]$$

$$-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2}}\,d[(x+1)^2+2]$$

$$-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|$$

$$\xlongequal{\text{公式②}} \sqrt{(x+1)^2+2}$$

$$-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$$

$$=\sqrt{x^2+2x+3}-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C.$$

【例 3】 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+2x+3}\,dx$

$$=\int\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\,d(x+1)$$

$$\xlongequal{\text{公式㉝}} \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$+\frac{(\sqrt{2})^2}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\right|+C$$

$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+3}$$

$$+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C.$$

【例 4】 $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\int\frac{(x^2+2x+3)-2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$

$$=\int\sqrt{x^2+2x+3}\,dx-2\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$-3\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$$

$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+3}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|$$

$$-2[\sqrt{x^2+2x+3}-\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|]$$

$$-3\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|+C$$

$$=\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+3}+C.$$

【例 5】 求 $\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$.

解：第一种方法：

$$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx=\int\frac{1}{\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+2\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x+1}\,d(\operatorname{tg} x)$$

$$=\int\frac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}\,d(\operatorname{tg} x)\xlongequal{\text{公式②}}-\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}+C.$$

第二种方法：

$$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx=\int\frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{1+\sin 2x}\,dx=\int\frac{1-\sin 2x}{1-\sin^2 2x}\,dx=\int\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 2x}\,d(2x)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 2x}\,d(\cos 2x)$$

$$\xlongequal{\text{由公式⑬及②}} \frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x)-\frac{1}{2}\frac{1}{\cos 2x}+C$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin 2x-1}{\cos 2x}+C.$$

第三种方法：

$$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int\frac{1}{\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\right]^2}dx$$

$$=\int\frac{1}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x\right)\right]^2}dx$$

$$=\int\frac{1}{\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}d\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\xlongequal{\text{公式⑭}}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

在第三种方法中，我们利用了初等数学中的办法，把 $\sin x+\cos x$ 化成了一个角的正弦．一般地，$a\sin x+b\cos x$ 都可以化成一个角的正弦(或余弦)：

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cdot\sin x+\sin\theta\cdot\cos x)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\theta),$$

其中 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$(如图 1-8)．

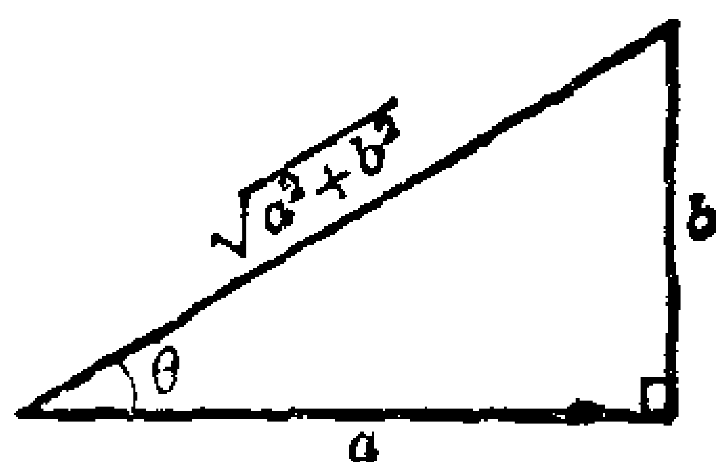


图 1-8

【例6】 求 $\int\frac{1}{a\sin x+b\cos x}dx$.

解：把被积函数的分母化成一个角的正弦：

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),$$

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},$$

则所求积分为

$$\int\frac{1}{a\sin x+b\cos x}dx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{1}{\sin(x+\theta)}d(x+\theta)$$

$$\xlongequal{\text{公式⑫}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\theta}{2}\right|+C,$$

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

特别地，当 $a=b=1$，则 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$，于是

$$\int\frac{1}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

顺便提一下，把 $a\sin x+b\cos x$ 化成一个角的正弦（或余弦）是今后经常要用到的方法．例如，以后学习到傅里叶(Fourier)级数时，就会碰到下式：

$$a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t=A_n\sin(n\omega t+\varphi_n),$$

其中 $$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad \varphi_n=\operatorname{arc\,tg}\frac{a_n}{b_n}.$$

第二章

几类可以表为有限形式的不定积分

在第一章，我们学习了常用积分表和积分法的一般法则，并运用它们求出了许多初等函数的不定积分．从中看到，求不定积分与求导数很不一样，后者方法固定，而前者方法多样，比较灵活．

在这里，需要进一步指出的是，积分法与微分法还有一个绝不相同的地方．我们知道，任何一个初等函数的导数都可以根据基本导数表和微分法的一般法则求出来，并且仍然是初等函数．但是，积分法却不如此．事实上，有许多初等函数都"积不出来"，并不是因为积分方法不够，而是由于这些函数的不定积分根本不能用初等函数来表示．所谓初等函数，大家知道，就是由六类基本初等函数（常数函数、幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数）经过有限次四则运算及复合手续而得到的函数．因此，我们有时也把"积不出来"叫做"不能表为有限形式"．那么，哪一些初等函数的不定积分不能表为有限形式呢？要对这个问题作一般性的回答是很困难的，它超出了本书的讨论范围（读者若有兴趣，可参考 Ritt 的书：Integration in finite terms, 1948, 纽约，哥仑比亚大学）．不过，我们可以告诉大家，以下积分都是不能表为有限形式的：

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\ \int \sqrt{\sin x}\,dx,$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx,\ \int \frac{1}{\ln x}\,dx,\ \int e^{-x^2}dx,\ \int \sin x^2 dx,$$

$$\int \cos x^2 dx,\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\ \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{(1+h\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \quad (其中\ 0<k<1).$$

后三个积分称为第一,第二,第三种椭圆积分. 它们是在求椭圆的弧长时碰到的, 并由此得名. 法国数学家刘维尔(Liouville)曾经证明了它们不能表为有限形式.

一些初等函数的原函数不再是初等函数, 这件事并不费解. 比如代数函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 的原函数不再是代数函数,而是超越函数 arc tg$x$, 就是类似的情形. 又如, 一些有理数开方以后, 不再是有理数, 而是无理数(如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 等等). 这类例子,读者很容易再举出一些.

本章的目的,在于讨论相反的问题: 介绍几类可以表为有限形式的不定积分.

第一节 有理函数的积分

两个多项式的商称为有理分式或有理函数. 这里我们总假定分子、分母已经没有公因式, 也就是说, 我们只讨论"既约分式". 当分子的次数低于分母的次数, 这个有理分式称为真分式; 反之, 当分子的次数不低于分母的次数, 这个有理分式称为假分式. 任何假分式总可以用多项式除法, 化为一个多项式与一个真分式的和. 例如:

$$\frac{x^3+1}{x^2+x+1}=x-1+\frac{2}{x^2+x+1},$$

$$\frac{2x^2+x-1}{x^2+1}=2+\frac{x-1}{x^2+1},$$

等等．由于多项式的原函数仍是多项式，因此，只须考虑真分式的积分问题．

在第一章，我们曾经用第一换元法，求过一些简单的真分式的积分．例如：

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0),$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-3x+2} &= \int \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)}\,dx \\ &= \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C \\ &= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x-4}{x^2+2x+3}\,dx &= \int \frac{(x+1)-5}{(x+1)^2+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d[(x+1)^2+2]}{(x+1)^2+2} - 5\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C,\end{aligned}$$

等等．

对于一般的真分式，怎样求积分呢？

基本方法是先把真分式分解为最简分式的代数和，然后逐项求积分．下面分别加以讨论．

1.1 真分式分解为最简分式

下列四种类型的分式称为最简分式（或部分分式）：

(1) $\dfrac{A}{x-a}$,　　(2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$,

(3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,　　(4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$.

其中 A, M, N, a, p, q 都是常数; $n=2, 3, \cdots$; 并且假定二次三项式 x^2+px+q 没有实根,即判别式

$$p^2-4q<0 \quad 或 \quad q-\frac{p^2}{4}>0.$$

我们立刻就会看到:任何一个真分式,都可以分解为最简分式的代数和. 这种分解一般可由两步完成.

第一步: 将分母在实数范围内进行因式分解;

第二步: 根据分母的分解情况, 将真分式分解为最简分式的代数和.

先讨论第一步——真分式分母的分解.

这里需要用到高等代数中的一个定理,我们叙述一下.

定理 1(代数基本定理)

任何 m 次代数方程

$$b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m=0 \tag{1}$$

($b_0\neq0$, m 是正整数)必有 m 个根(实的或复的).

当方程的系数 b_0, b_1, $\cdots$, b_{m-1}, b_m 都是实数时, 复根必成对出现. 即如果 $z=\alpha+i\beta$ $(i=\sqrt{-1})$ 是方程 (1) 的根, 那么, $\bar{z}=\alpha-i\beta$ 也是方程(1)的根.

设方程(1)的 m 个根是 x_1, x_2, $\cdots$, x_m, 则方程(1)的左端 m 次多项式显然可以写成 m 个因式的乘积:

$$\begin{aligned}&b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m\\&\quad=b_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m).\end{aligned} \tag{2}$$

现在讨论真分式分母的分解.

设有真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m} \quad (a_0\cdot b_0\neq0), \tag{3}$$

根据定理 1, 分母可以按(2)式进行分解:

$$Q(x)=b_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m), \tag{4}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是方程 $Q(x)=0$ 的 m 个根.

把相同的因式写成幂的形式，并把复因式 $(x-z)(x-\bar{z})$ 合并为实的二次三项式：

$$(x-z)(x-\bar{z})=x^2-(z+\bar{z})x+z\cdot\bar{z}=x^2+px+q,$$

这里，$z+\bar{z}=p$, $z\cdot\bar{z}=q$ 显然都是实数，并且判别式

$$p^2-4q<0.$$

这样整理之后，分母 $Q(x)$ 的分解式(4)便可改写成若干个一次质因式与二次质因式的乘积：

$$\begin{aligned}Q(x)=&b_0(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_s)^{k_s}\\&\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\\&\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r},\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_s+2(l_1+l_2+\cdots+l_r)=m.$

【例 1】 设多项式 $Q(x)=x^3-3x^2+4$, 则 $Q(x)$ 的分解式为

$$x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2.$$

这里 $Q(x)$ 只有一次质因式，没有二次质因式.

【例 2】 设 $Q(x)=x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$, 则 $Q(x)$ 可以分解为

$$x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)^2.$$

这里有一次质因式，也有二次质因式.

以上是真分式分解为最简分式的第一步——真分式分母的分解.

下面讨论第二步——根据分母的分解情况，将真分式分解为最简分式的代数和.

这里要用到高等代数中另一个定理.

定理 2 (既约真分式分解为最简分式)

① 分母 $Q(x)$ 的分解式中若有因式 $(x-a)^k$，则真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解后有下列 k 个最简分式的代数和：

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \tag{6}$$

其中 $A_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 都是常数．当 $k=1$，则分解式(6)只有一项 $\frac{A}{x-a}$，A 是常数．

② 分母 $Q(x)$ 中若有因式 $(x^2+px+q)^l$，其中 $p^2-4q<0$，则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解后有下列 l 个最简分式的代数和：

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}, \tag{7}$$

其中 M_i，$N_i(i=1, 2, \cdots, l)$ 都是常数．当 $l=1$，则分解式(7)只有一项 $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$，M，N 是常数．

例如，真分式 $\frac{3x^2-4}{x^2(x+1)^3(x-2)(x^2+x+1)(x^2-2x+3)^2}$ 分解后是下列九个最简分式的代数和：

$$\begin{aligned}&\frac{3x^2-4}{x^2(x+1)^3(x-2)(x^2+x+1)(x^2-2x+3)^2}\\&\quad=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}+\frac{C}{x-2}\\&\quad\quad+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2-2x+3}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2-2x+3)^2}.\end{aligned}$$

分解式中的常数，可以用下面的“待定系数法”来确定．

【例 3】 将真分式 $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$ 分解为最简分式．

解：第一步：将分母作因式分解：

$$x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)=x(x-1)(x+2).$$

第二步：由定理 2，知所给真分式可分解为

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}, \tag{8}$$

其中A, B, C是常数. 我们用待定系数法来确定它们.

将(8)式的右端通分,得到

$$\begin{aligned}&\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}\\&=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}\\&=\frac{(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A}{x(x-1)(x+2)}.\end{aligned}$$

于是(8)式化为

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A}{x(x-1)(x+2)}.$$

左、右两端的分母恒等,因而分子也恒等:

$$2x+3\equiv(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A.$$

比较两端同类项的系数,得

$$\begin{cases}A+B+C=0,\\A+2B-C=2,\\-2A=3.\end{cases}$$

解这个方程组,得到

$$A=-\frac{3}{2},\ B=\frac{5}{3},\ C=-\frac{1}{6}.$$

于是得分解式

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+2}.$$

【例 4】 将真分式 $\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}$ 分解为最简分式.

解: 第一步:

分母 $x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$.

第二步：设

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}. \tag{9}$$

用待定系数法确定常数 A, B, C：

将(9)式右端通分，再比较左、右端分子，得

$$x-5\equiv A(x-2)^2+B(x+1)\cdot(x-2)+C(x+1)$$
$$=(A+B)x^2+(-4A-B+C)x+(4A-2B+C).$$

比较两端同类项的系数，得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -4A-B+C=1, \\ 4A-2B+C=-5. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$A=-\frac{2}{3},\ B=\frac{2}{3},\ C=-1.$$

于是得分解式

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}.$$

从例3，例4，我们看到：真分式分解时，只考虑分母的情况，而与分子无关(定理2)；但是，在我们用待定系数法确定分解式中的常数时，就完全由分子来决定了.

【例5】 将真分式 $\frac{x}{(x+1)(x^2+3)}$ 分解为最简分式.

解：分母已经分解好了，因此只须设

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}. \tag{10}$$

下面用待定系数法来确定常数.

将(10)式右端通分，并比较左、右端分子，得

$$x\equiv A(x^2+3)+(Bx+C)\cdot(x+1)$$
$$=(A+B)x^2+(B+C)x+(3A+C).$$

两端比较系数，得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B+C=1, \\ 3A+C=0. \end{cases}$$

解方程组，得

$$A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{4},\ C=\frac{3}{4}.$$

于是得分解式

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+3)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x+3}{x^2+3}.$$

【例 6】 将真分式 $\dfrac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}$ 分解为最简分式.

解：设分解式为

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}. \qquad (11)$$

将(11)式右端通分，并比较左、右端分子，得

$$\begin{aligned} 2x+2 &\equiv A(x^2+1)^2+(Bx+C)\cdot(x-1)\cdot(x^2+1) \\ &\quad +(Dx+E)(x-1) \\ &=(A+B)x^4+(C-B)x^3+(2A+B-C+D)x^2 \\ &\quad +(-B+C-D+E)x+(A-C-E), \end{aligned}$$

两端比较系数，得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-B=0, \\ 2A+B-C+D=0, \\ -B+C-D+E=2, \\ A-C-E=2. \end{cases}$$

解方程组，得

$$A=1,\ B=-1,\ C=-1,\ D=-2,\ E=0.$$

于是得分解式

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}-2\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

以上我们讨论了怎样把一个真分式分解为最简分式的问题.

1.2 真分式的积分法

既然任何真分式都可以分解为最简分式的代数和，因此真分式的积分，最后也就归结为四种最简分式的积分. 我们就会看到，这四种积分都不难用第一换元法及分部积分法求得.

(1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$

(2) $$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)$$

$$=\frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1}+C$$

$$=\frac{A}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C\quad(n=2,\ 3,\cdots).$$

(3) $$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx$$

$$=M\int\frac{x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx$$

$$+N\int\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx$$

$$=M\int\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)-\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx$$

$$+N\int\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx$$

$$=M\int\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}d\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}d\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}d\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right|$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

$$=\frac{M}{2}\ln|x^2+px+q|$$

$$+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

因为有假定：$p^2-4q<0$，即$4q-p^2>0$，亦即$q-\frac{p^2}{4}>0$，所以$\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$与$\sqrt{4q-p^2}$是实数。

(4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$

$$= M\int \frac{x}{(x^2+px+q)^n} dx + N\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx$$

$$= M\int \frac{\left(x+\frac{p}{2}\right) d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^n},$$

这里，第一个积分中

$$\int \frac{\left(x+\frac{p}{2}\right) d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-n+1}\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^{-n+1} + C_1$$

$$= \frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C_1 \quad (n=2, 3, \cdots).$$

第二个积分可用代换 $x+\frac{p}{2}=t$, $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=a$ 化为积分 $\int \frac{1}{(t^2+a^2)^n} dt$. 对于这个积分，我们在第一章中，曾用分部积分法导出了递推公式（见第一章第二节第四段例 47）. 这样就解决了第 4 种最简分式的积分问题.

综上所述，四种最简分式的原函数都是初等函数，而真分式可分解为最简分式的代数和，因此，任何真分式从而任何有理函数的原函数也是初等函数. 这就是说，有理函数的积分可以表为有限形式.

我们来看几个例子.

【例 7】 求不定积分 $\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4} dx$.

解: 由例 4, 知

$$\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4} dx$$

$$= -\frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

$$= -\frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C$$

$$= \frac{2}{3} \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{1}{x-2} + C.$$

【例 8】 求 $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$.

解: 由例 6, 知

$$\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx - 2\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \ln|x-1| - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$- \int \frac{1}{(x^2+1)^2} d(x^2+1)$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{x^2+1} + C$$

$$= \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{x^2+1} + C.$$

【例 9】 求 $\int \frac{x^5}{x^3+x-2} dx$.

解: 先用多项式除法把被积函数化为多项式与真分式的和:

$$\frac{x^5}{x^3+x-2}=x^2-1+\frac{2x^2+x-2}{x^3+x-2}.$$

再把真分式分解为最简分式:

因为分母 $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$，所以有分解式

$$\frac{2x^2+x-2}{x^3+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(2A-C)}{(x-1)(x^2+x+2)},$$

比较分子，得方程组

$$\begin{cases} A+B=2, \\ A-B+C=1, \\ 2A-C=-2. \end{cases}$$

解出 $$A=\frac{1}{4},\ B=\frac{7}{4},\ C=\frac{5}{2}.$$

从而 $$\frac{2x^2+x-2}{x^3+x-2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{7}{4}x+\frac{5}{2}}{x^2+x+2}.$$

于是所求积分

$$\int\frac{x^5}{x^3+x-2}dx$$

$$=\int(x^2-1)dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{7}{4}\int\frac{x+\frac{10}{7}}{x^2+x+2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{7}{4}\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{13}{14}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{7}{8}\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$+\frac{13}{8}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{7}{8}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|$$

$$+\frac{13}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{7}{8}\ln(x^2+x+2)$$

$$+\frac{13}{4\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

以上我们一般性地讨论了有理函数的积分法——先把假分式化为多项式与真分式的和，再把真分式分解为部分分式，然后逐项求积分．在理论上，这是普遍可用的方法．但是，必须指出，这个方法具体使用起来，在技术上是有困难的．首先，计算可能比较麻烦；其次，真分式的分母是一个多项式，当这个多项式的次数较高时，作因式分解就非常困难，甚至不大可能．事实上，高次方程求根还没有具体办法．因此，一般说来，有理函数求积分时，如果计算比较烦，最好先试试有无其它简便方法．

【例 10】 求 $\int\frac{x(2-x^2)}{1-x^4}dx$.

解：第一种作法：

$$\int\frac{x(2-x^2)}{1-x^4}dx=\int\frac{2x\,dx}{1-x^4}-\int\frac{x^3\,dx}{1-x^4}$$

$$=\int\frac{d(x^2)}{1-(x^2)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{d(1-x^4)}{1-x^4}$$

$\underline{\underline{\text{利用积分公式㉘}}}\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right|+\dfrac{1}{4}\ln|1-x^4|+C$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|+\frac{1}{4}\ln|(1+x^2)(1-x^2)|+C$$

$$=\frac{3}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{4}\ln|1-x^2|+C.$$

第二种作法——将被积函数分解为部分分式：

因为分母 $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$，所以应设

$$\frac{x(2-x^2)}{1-x^4}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

用待定系数法，得到

$$\begin{cases} A-B-C=-1, \\ A+B-D=0, \\ A-B+C=2, \\ A+B+D=0. \end{cases}$$

解出 $A=\dfrac{1}{4},\ B=-\dfrac{1}{4},\ C=\dfrac{3}{2},\ D=0.$

于是积分

$$\int\frac{x(2-x^2)}{1-x^4}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\ln(x^2+1)+C$$

$$=\frac{3}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{4}\ln|1-x^2|+C.$$

两种作法的结果相同，但第一种方法比较简便。

【例 11】 $\displaystyle\int\frac{x}{x^4+3x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2}d(x^2+2)$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C=\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}+C.$$

习　题　一

1. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{x^3}{3+x}dx$;　　(2) $\int\frac{x+1}{1-x}dx$;

(3) $\int\frac{x^5}{1-x^2}dx$;　　(4) $\int\frac{x\,dx}{x^4+4}$;

(5) $\int\frac{(2+x)^2}{2+x^2}dx$;　　(6) $\int\frac{dx}{x^2+3x+1}$;

(7) $\int\frac{5x+6}{x^2+x+1}dx$;　　(8) $\int\frac{1}{(x^2+2)(x^2+4)}dx$;

(9) $\int\frac{2x\,dx}{x^4+5x^2+6}$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$;　　(2) $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$;

(3) $\int\frac{x\,dx}{x^2-7x+10}$;　　(4) $\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$;

(5) $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$,　　(6) $\int\frac{x^4-x^3+x+1}{x^2(x-1)}dx$;

(7) $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$;　　(8) $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$;

(9) $\int\frac{2x^2+1}{x^4+x^3-x-1}dx$;　　(10) $\int\frac{x^4}{x^2+x-2}dx$;

(11) $\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$;　　(12) $\int\frac{dx}{x^3+1}$;

(13) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;　　(14) $\int\frac{dx}{x^4-1}$;

(15) $\int\frac{dx}{x^4+1}$;

(16) $\int \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}dx$;

(17) $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$;

(18) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$;

(19) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$;

(20) $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}dx$;

(21) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2)}$;

(22) $\int \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}dx$.

第二节　三角函数的有理式的积分

由三角函数及常数经过有限次四则运算所得到的式子，称为三角函数的有理式. 例如

$$\sin^2 x,\ \frac{1}{1+\cos x},\ \frac{1}{\sin x},\ \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)},$$

$$\frac{2}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\sin 2x},\ \frac{1}{5+3\sin x},\ \frac{\sqrt{\pi}\sec x}{\operatorname{ctg} x-5\cos x}$$

等等都是，而 $\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}$ 不是.

由于 $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$ 可以用 $\sin x$, $\cos x$ 表示出来，因此三角函数的有理式一般可记作

$$R(\sin x,\ \cos x),$$

这里，$R(u,\ v)$ 表示关于 u, v 的有理函数.

关于三角函数有理式的积分，大家在第一章已经碰到过不少. 例如

$$\int \sin^2 x\,dx,\ \int \frac{1}{1+\cos x}dx,\ \int \frac{1}{\sin x}dx,$$

$$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx,\ \int \sin^{2m+1}x\cdot\cos^n x\,dx,$$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2n+1} x\, dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx dx,$$

$$\int \sin mx \cdot \cos nx\, dx, \quad \int \cos mx \cdot \cos nx\, dx, \quad \int \sin^n x\, dx,$$

$$\int \cos^n x\, dx, \quad \int \frac{1}{\sin^n x}\, dx, \quad \int \frac{1}{\cos^n x}\, dx$$

等等，我们曾用第一换元法和分部积分法计算过它们，知道它们都能表为有限形式.

但是，我们要问：任何一个三角函数有理式的积分是否都能表为有限形式呢？回答是肯定的. 我们有如下

定理 三角函数有理式的积分

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\, dx$$

恒可用代换 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ 或 $x=2\operatorname{arc\,tg} t$ 化为 t 的有理函数的积分，从而可以表为有限形式.

【证】 由 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，知

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

又由 $x=2\operatorname{arc\,tg} t$，知

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

于是 $\int R(\sin x,\ \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt,$

上式右端是 t 的有理函数的积分.

因为有理函数的积分可以表为有限形式，所以三角函数有理式的积分 $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ 也可以表为有限形式.]

代换 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ 称为万能代换.

【例 1】 求 $\int\frac{1}{\sin x}dx.$

解：设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1+t^2}{2t},$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

因而

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

与第一章所得结果相同.

【例 2】 求 $\int\frac{1}{2+\cos x}dx.$

解：设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则

$$\frac{1}{2+\cos x}=\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+t^3}{3+t^2},$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

于是

$$\int\frac{1}{2+\cos x}\,dx=\int\frac{1+t^2}{3+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=2\int\frac{1}{3+t^2}\,dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

【例 3】 求 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x\cdot(1+\cos x)}dx$.

解：设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, 则

$$\frac{1+\sin x}{\sin x\cdot(1+\cos x)}=\frac{t^2+2t+1}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2}{4t}$$

$$=\frac{(t^2+2t+1)(1+t^2)}{4t},$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

于是

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x\cdot(1+\cos x)}\,dx=\int\frac{(t^2+2t+1)\cdot(1+t^2)}{4t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

【例 4】 求 $\int\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x+\cos x-1}dx$.

解：设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, 则

$$\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1-t^2}{2t},$$

$$\sin x+\cos x-1=\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-1=\frac{2t(1-t)}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

于是

$$\int\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x+\cos x-1}dx=\int\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{1+t^2}{2t(1-t)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+t}{t^2}dt=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

说明 以上我们用万能代换求出了几个三角函数有理式的积分. 从理论上来说, 任何一个三角函数有理式的积分, 都可以用万能代换求出来. 但是, 对于具体的题目, 却不必一律套用万能代换. 这是因为在许多情形下, 用万能代换化出来的被积函数往往是比较复杂的有理函数, 积分起来比较困难. 因此, 需要根据具体情况, 选择适当的方法. 例如以下几种方法就是常用的:

① 当被积函数 $R(\sin x,\ \cos x)$ 可化为 $\operatorname{tg}x$ 的函数或 $\sin^2x$ 与 $\cos^2x$ 的函数, 即

$$R(\sin x,\ \cos x)=R_1(\operatorname{tg}x)$$

或
$$R(\sin x,\ \cos x)=R_1(\sin^2x,\ \cos^2x)$$

时, 宜用代换 $\operatorname{tg}x=t$, 或 $x=\operatorname{arc\,tg}t$. 此时,

$$\cos^2x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2x=1-\cos^2x=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{1}{1+t^2}dt,$$

于是

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx=\int R_1(\operatorname{tg} x)dx=\int R_1(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}dt,$$

或

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx=\int R_1(\sin^2 x,\ \cos^2 x)dx$$

$$=\int R_1\left(\frac{t^2}{1+t^2},\ \frac{1}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2}dt.$$

【例 5】 $$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}dx$$

$$=\int\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+1}dx\xlongequal{\text{令 } \operatorname{tg}x=t}\int\frac{t}{t+1}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\int\frac{1}{t+1}dt+\int\frac{t+1}{1+t^2}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+\operatorname{arc\,tg} t\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{|t+1|}+\operatorname{arc\,tg} t\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{|\operatorname{tg} x+1|}+x\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\sec x}{\operatorname{tg} x+1}\right|+x\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{|\sin x+\cos x|}+x\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}[x-\ln|\sin x+\cos x|]+C.$$

此题若用万能代换，则麻烦多了.

② 对于 $\int\sin^2 mx\,dx$, $\int\cos^2 mx\,dx$, 可利用倍角公式来计算(见第一章).

③ 对于 $\int \sin mx \cdot \sin nx\,dx$, $\int \sin mx \cdot \cos nx\,dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx\,dx\,(m \neq n)$, 可利用积化和差公式来计算(见第一章).

④ 对于 $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$, 当 m, n 中有一个是奇数, 可照第一章第二节第一换元法例 23 的思考题去作; 当 m, n 都是偶数,则可利用倍角公式

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

逐步求出积分(见下例).

【例 6】 $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx = \int (\sin^2 x \cdot \cos^2 x)\cos^2 x\,dx$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot (1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\,dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d(\sin 2x)$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

⑤ 对于 $\int \sin^n x\,dx$, $\int \cos^n x\,dx$, 我们曾在第一章第二节中用分部积分法导出了递推公式. 除了这个方法之外, 还可仿照上面情形④,将 n 分为奇、偶数分别计算(见下面两例).

【例 7】 $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$

$$= \int (1-\cos^2 x)\,d(-\cos x)$$

$$= \int (\cos^2 x - 1)\,d(\cos x)$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$$

【例 8】 $\int \sin^4 x\,dx=\int(\sin^2 x)^2dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(x-\sin 2x+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

⑥ 对于 $\int\frac{1}{\sin^n x}dx$, $\int\frac{1}{\cos^n x}dx$, 在第一章第二节中也曾导出过递推公式．但当 n 是偶数时，还可以这样作：

【例 9】 $\int\frac{1}{\cos^6 x}dx=\int\sec^6 x\,dx=\int\sec^4 x\cdot\sec^2 x\,dx$

$$=\int(1+\operatorname{tg}^2 x)^2d(\operatorname{tg} x)$$

$$=\int(1+2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)\,d(\operatorname{tg} x)$$

$$=\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C.$$

从以上讨论可以看到：求三角函数有理式的积分时，方法是灵活多样的．读者可根据自己的作题经验，进行总结．

习 题 二

1．求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{2+\sin x}dx$; (2) $\int\frac{1}{4-5\sin x}dx$;

(3) $\int\frac{1}{5-3\cos x}dx$; (4) $\int\frac{1}{\sin x+\operatorname{tg} x}dx$;

(5) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;　　(6) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;

(7) $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$;　　(8) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$;

(9) $\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx\quad (0<r<1,\ -\pi<x<\pi)$;

(10) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$;　　(11) $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$;

(12) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\operatorname{tg} x}\,dx$;　　(13) $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$;

(14) $\int \frac{1}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}\,dx$.

2. 求下列不定积分:

(1) $\int \sin^5 x\,dx$;　　(2) $\int \sin^6 x\,dx$;

(3) $\int \sin^4 x\cdot\cos^4 x\,dx$;　　(4) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$;

(5) $\int \sec^4 x\,dx$;　　(6) $\int \sec^5 x\,dx$;

(7) $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{1-\cos^4 x}\,dx$;　　(8) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg} x\cdot\cos 2x}$;

(9) $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x\cdot\cos 3x}$;　　(10) $\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x-\cos^3 x}$.

第三节　某些根式的有理式的积分

根式 $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ 的有理式，是指由 $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ 和 x 以及常数经过有限次四则运算所得到的式子，记作

$$R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right).$$

由根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 和 x 以及常数经过有限次四则运算所得到的式子

$$R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})$$

称为根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的有理式，这里 $a\neq 0$，$ax^2+bx+c\geqslant 0$。

本节的目的在于论证不定积分

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx \tag{1}$$

和

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \tag{2}$$

可以表为有限形式.

因为有理函数的积分可以表为有限形式，所以只要能找到适当的代换把积分(1)和(2)的被积函数化为有理函数，问题就解决了。

在第一章第二节的第二换元法中，我们曾经通过例子介绍了几种根式的有理式的积分．下面我们系统地总结一下这些方法，并结合着讨论积分(1)和(2)。

(1) 形如 $\int R(x,\ \sqrt[n]{ax+b})\,dx$ 的积分。

设 $\sqrt[n]{ax+b}=t$，即 $x=\dfrac{t^n-b}{a}$，则

$$dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt,$$

于是 $\int R(x,\ \sqrt[n]{ax+b})\,dx=\int R\left(\dfrac{t^n-b}{a},\ t\right)\cdot\dfrac{n}{a}t^{n-1}dt$.

等式右端是 t 的有理函数的积分，从而可以表为有限形式。

【例 1】 求 $\int\dfrac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}dx$.

解：设 $\sqrt{x+2}=t$，即 $x=t^2-2$，则

$$\frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}=\frac{t}{1+t},$$

$$dx=2tdt,$$

于是

$$\int\frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{t}{1+t}\cdot 2t\,dt=2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=2\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(1+t)\right]+C_1$$

$$=2\left[\frac{x+2}{2}-\sqrt{x+2}+\ln(1+\sqrt{x+2})\right]+C_1$$

$$=x-2\sqrt{x+2}+\ln(1+\sqrt{x+2})^2+C\quad(C=C_1+2).$$

(2) 形如$\int R(x,\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b},\cdots,\sqrt[n_s]{ax+b})dx$的积分.

设$\sqrt[n]{ax+b}=t$，n是n_1，n_2，…，n_s的最小公倍数，则可将积分化为t的有理函数的积分.

【例 2】 求$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

解：设$\sqrt[6]{x}=t$，即$x=t^6$，则

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\frac{t^3}{t^3-t^2}=\frac{t}{t-1},$$

$$dx=d(t^6)=6t^5dt,$$

于是

$$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{t}{t-1}\cdot 6t^5\,dt$$

$$=6\int\left[t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right]dt$$

$$=6\left[\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right]+C$$

$$=x+\frac{6}{5}x^{5/6}+\frac{3}{2}x^{2/3}+2x^{1/2}+3x^{1/3}+6x^{1/6}$$

$$+6\ln|x^{1/6}-1|+C$$

$$=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$$

$$+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C.$$

(3) 形如$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$的积分，即本节积分(1).

设 $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=t$, 即 $x=\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}$, 则

$$dx=\left(\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}\right)'dt,$$

于是

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx=\int R\left(\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}, t\right)\cdot\left(\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}\right)'dt.$$

等式右端是 t 的有理函数的积分.

【例 3】 求$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

解: $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{x+1}dx,$

设 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$, 即 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, 则

$$x+1=\frac{t^3+1}{t^3-1}+1=\frac{2t^3}{t^3-1},$$

$$dx=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt,$$

于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\int t\cdot\frac{t^3-1}{2t^3}\left(-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\right)dt=-3\int\frac{1}{t^3-1}\,dt$$

$$=-\int\frac{1}{t-1}\,dt+\int\frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt$$

$$=-\int\frac{1}{t-1}\,dt+\frac{1}{2}\int\frac{(2t+1)+3}{t^2+t+1}\,dt$$

$$=-\int\frac{1}{t-1}\,dt+\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2+t+1}\,dt$$

$$=-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

最后，再将 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ 代入，化简即可.

(4) 形如 $\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\sqrt[n_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\cdots,\sqrt[n_s]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ 的积分.

只须设 $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=t$，$n$ 是 n_1，n_2，…，n_s 的最小公倍数，就可将被积函数有理化.

(5) 形如 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分，即本节积分(2)，其中 $a\neq0$，$ax^2+bx+c\geqslant0$.

这里假定 $b^2-4ac\neq0$，否则 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 不再是无理式.

在第一章第二换元法中，我们讨论了形如

$$\int R(x,\sqrt{x^2+A^2})dx, \tag{3}$$

$$\int R(x,\sqrt{x^2-A^2})dx, \tag{4}$$

$$\int R(x, \sqrt{A^2-x^2})\,dx \tag{5}$$

的积分，介绍了三角函数代换法、双曲函数代换法以及倒代换法．它们的中心思想，都是设法把无理式化为有理式，然后求积分．

在那里，我们还针对形如

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \tag{2}$$

的积分，举了几个例子（见第一章小结中的例 1，2，3，4），并配备了一些习题．知道对于这种积分，可以先通过配方法把它们化为积分 (3)，(4)，(5) 中的某一种，然后查常用积分表．

现在所要讨论的是另外两个问题：

第一、从理论上论证所有形如

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \tag{2}$$

的积分，都可以通过配方法化为积分(3)，(4)，(5)之一．从而积分(2)可以表为有限形式．

第二、介绍求积分(2)的另一种方法——欧拉(Euler)代换法．

下面分别讨论．

第一、对于积分

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

$$(a\neq 0,\ ax^2+bx+c\geqslant 0), \tag{2}$$

只须讨论 $b^2-4ac\neq 0$ 的情形．

容易验证

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)],$$

记 $2ax+b=u$，则

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{\frac{1}{4a}[u^2+(4ac-b^2)]}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a}[u^2+(4ac-b^2)]}.$$

当 $a>0$，则

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{u^2+(4ac-b^2)}.$$

若 $b^2-4ac<0$，则设 $4ac-b^2=A^2$，于是

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{u^2+A^2},$$

若 $b^2-4ac>0$，则设 $b^2-4ac=A^2$，于是

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{u^2-A^2}.$$

当 $a<0$，即 $-a>0$，则

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(-a)}[-u^2-(4ac-b^2)]}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(-a)}[(b^2-4ac)-u^2]}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-a}}\sqrt{(b^2-4ac)-u^2},$$

此时必有 $b^2-4ac>0$（否则根号下 $(b^2-4ac)-u^2<0$，与假设 $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 相矛盾），因此可设 $b^2-4ac=A^2$，于是

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2\sqrt{-a}}\sqrt{A^2-u^2}.$$

这就证明了形如 $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分(2)，必

可通过配方法化为积分(3)，(4)，(5)之一，无一例外．而对于积分(3)，(4)，(5)，可分别作正切代换、正割代换和正弦代换

$$u=A\,\mathrm{tg}\,t,\quad u=A\sec t,\quad u=A\sin t,$$

把它们化为三角函数有理式的积分，而后者恒可表为有限形式，因此，积分(2)可以表为有限形式．

这样，$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分问题，已经从理论上完全解决了．

但是，我们必须指出：用上面这种方法化出来的积分，有时比较复杂，计算起来有困难．

下面，我们介绍另一种方法——欧拉(Euler)代换法．通过欧拉代换，也可以把形如

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx \tag{2}$$

的积分化为有理函数的积分，并且有时比较简单．

第二、欧拉代换法．

① 欧拉第一代换．

当 $a>0$ 时，设

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x\quad(\text{或}\,t+\sqrt{a}\,x).$$

两边平方后，可解出

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

从而

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}$$

$$=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt,$$

代入积分 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 后，即化为 t 的有理函数的积分.

② 欧拉第二代换.

当 $c>0$ 时，设

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c} \quad (\text{或} xt+\sqrt{c}).$$

两边平方后，解出

$$x=\frac{-2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},$$

从而

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{-2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}\cdot t-\sqrt{c}$$

$$=\frac{-\sqrt{c}t^2-bt-a\sqrt{c}}{a-t^2},$$

$$dx=-2\frac{\sqrt{c}t^2+bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt,$$

代入 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 后，即化为 t 的有理函数的积分.

③ 欧拉第三代换.

若方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同实根 λ 和 μ，则设

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda) \quad (\text{或} t(x-\mu)).$$

两边平方后，得到

$$ax^2+bx+c=t^2(x-\lambda)^2.$$

又因为 λ, μ 是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，所以有

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

这样，就有 $$t^2(x-\lambda)^2=a(x-\lambda)(x-\mu),$$
$$t^2(x-\lambda)=a(x-\mu).$$

从中解出 $$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},$$

于是

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$$
$$=t\left(\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a}-\lambda\right)=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},$$
$$dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt,$$

代入 $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 后，即化为 t 的有理函数的积分。

以上是三种欧拉代换，已经包括了所有情形。

容易了解，只用第一种和第三种代换就够了。这是因为，若 $ax^2+bx+c=0$ 有实根（一定是不相等的，前面已有假定），则可用第三种代换；若 $ax^2+bx+c=0$ 没有实根，即 $b^2-4ac<0$，则因 $ax^2+bx+c\geqslant 0$，而

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)],$$

所以必有 $a>0$，从而可用第一种代换。这就说明，第一种和第三种欧拉代换已经够用了，第二种欧拉代换在理论上是不必要的。不过，对于一些具体题目，有时用第二种代换可以使计算简便一些。

【例 4】 求 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$。

解：用欧拉第一代换。设

$$\sqrt{x^2-x+1}=t-x.$$

两边平方，得到

$$x^2-x+1=t^2-2tx+x^2,$$

消去 x^2，解出 $$x=\frac{t^2-1}{2t-1}.$$

从而 $$x+\sqrt{x^2-x+1}=x+(t-x)=t,$$

$$dx=d\left(\frac{t^2-1}{2t-1}\right)=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt.$$

于是

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1}+C.$$

最后，将 $t=x+\sqrt{x^2-x+1}$ 代入结果，即得

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|$$

$$-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|$$

$$-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}+C.$$

此题也可以用欧拉第二代换来作.

设 $$\sqrt{x^2-x+1}=xt-1.$$

两边平方后，解出

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1}.$$

从而

$$\sqrt{x^2-x+1}=xt-1=\frac{2t-1}{t^2-1}\cdot t-1=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{2t-1}{t^2-1}+\frac{t^2-t+1}{t^2-1}=\frac{t^2+t}{t^2-1}=\frac{t}{t-1}.$$

$$dx=d\left(\frac{2t-1}{t^2-1}\right)=\frac{-2t^2+2t-2}{(t^2-1)^2}dt$$

$$=\frac{-2t^2+2t-2}{(t+1)^2(t-1)^2}dt.$$

代入积分，得到

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{t-1}{t}\cdot\frac{-2t^2+2t-2}{(t+1)^2(t-1)^2}dt$$

$$=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{t+1}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+\frac{3}{t+1}+C.$$

最后，将 $t=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$ 代入，即得

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}\right|$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}-1\right|$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}+1\right|$$

$$+\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}+C$$

$$=2\ln|\sqrt{x^2-x+1}+1|-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}-x+1|$$

$$-\frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}+x+1|$$

$$+\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}+C.$$

这个结果与上面我们采用欧拉第一代换所得到的结果不同，这是因为用不同的方法找到了两个不同的原函数．两个结果都对，大家可用求导数的方法去验证．

【例5】 求$\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

解：方程$-x^2+3x-2=0$有两个不同实根：1和2，因此可用欧拉第三代换．设

$$\sqrt{-x^2+3x-2}=t(x-1),$$

则 $$-x^2+3x-2=t^2(x-1)^2.$$

同时又有 $$-x^2+3x-2=-(x-1)(x-2),$$

因而 $$t^2(x-1)^2=-(x-1)(x-2).$$

消去$(x-1)$，得到

$$t^2(x-1)=-(x-2),$$

从中解出 $$x=\frac{t^2+2}{t^2+1}.$$

从而

$$\sqrt{-x^2+3x-2}=t(x-1)=t\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}-1\right)=\frac{t}{t^2+1},$$

$$dx=d\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt.$$

于是

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2+3x-2}}=\int\frac{(t^2+1)^2}{(t^2+2)\cdot t}\cdot\frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2+2}=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$

$$=-\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

最后，从所作代换 $\sqrt{-x^2+3x-2}=t(x-1)$ 中解出 $t=$

$\frac{\sqrt{-x^2+3x-2}}{x-1}$, 代入结果, 即得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$$=-\sqrt{2}\ \mathrm{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{-x^2+3x-2}}{\sqrt{2}\,(x-1)}\right]+C.$$

这题也可以用第一章第二节所讲的倒代换来作. 令 $x=\frac{1}{t}$, 则

$$x\sqrt{-x^2+3x-2}=\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1}{t^2}+3\cdot\frac{1}{t}-2}$$

$$=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{-1+3t-2t^2}{t^2}}=\frac{1}{t^2}\sqrt{-2t^2+3t-1},$$

$$dx=\frac{-1}{t^2}dt,$$

从而

$$\int\frac{1}{x\sqrt{-x^2+3x-2}}dx=\int\frac{t^2}{\sqrt{-2t^2+3t-1}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{-2\left(t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{-2\left[\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right]}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{-2\left[\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{2\left[\frac{1}{16}-\left(t-\frac{3}{4}\right)^2\right]}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(t-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(t-\frac{3}{4}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{t-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(4t-3)+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4-3x}{x}\right)+C.$$

这个结果与上面的结果虽然在形式上不一样，但都是对的，大家用求导数的方法很容易验证这一点.

作为这一段的结尾，我们指出以下两点：

① 形如 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分，如果具有下面两种最简单的形式：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad 或 \quad \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

那么，先把根号下的二次三项式 ax^2+bx+c 配方，然后再查第一章常用积分表中的公式㉙～㉟，即可解决问题(即不必用欧拉代换或其它代换).

② 如果积分 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 具有形式

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

那么，除了可用欧拉代换外，也可用倒代换(见上面例 5).

至此，我们已经讨论完了本节一开始提出的问题：积分(1)和积分(2)可以表为有限形式.

习 题 三

1. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

(2) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3}$;

(4) $\int \frac{(x-1)dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}$;

(5) $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$;

(6) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$;

(7) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$;

(8) $\int \frac{xdx}{(a+bx)^{3/2}}$;

(9) $\int t\sqrt{a+t}\,dt$;

(10) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$;

(11) $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$;

(12) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;

(13) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$;

(14) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$;

(15) $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$;

(16) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

(17) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n 是自然数);

(18) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a>0)$.

2. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$;

(3) $\int \sqrt{-2x^2+4x-1}\,dx$;

(4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+3}}$;

(5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}$;

(6) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

第二章小结

1．本章讨论了几类可以表为有限形式的不定积分，它们是

有理函数的积分；

三角函数的有理式的积分；

某些根式的有理式的积分．

对于有理函数，总是先分解为最简分式或部分分式，然后逐项求积分．一般说来，分解为部分分式的方法，多采用待定系数法，但是对于某些具体情况，也可能有一些更简便的方法，例如我们在第一章讲过的分项积分法．举一个简单的例子：

$$\int\frac{2dx}{x(x-1)}=2\int\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}\,dx=2\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right]dx$$

$$=2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$$

三角函数的有理式的积分，总可以通过万能代换化为有理函数的积分，然后，再用上面所说的方法去作．不过，对于一些具体题目，有时也有更方便的方法(见第二章及本章第二节后面的说明)．

第三节我们讨论了某些根式的有理式的积分，主要是

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx \tag{1}$$

和

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,dx. \tag{2}$$

对于积分(1)，可用代换 $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=t$，把它化为 t 的有理函数的积分．对于积分(2)，总可以用欧拉代换把它化为有理函

数的积分. 但是, 在某些具体问题中, 也可以不用欧拉代换, 而用其它方法, 例如配方后查常用积分表, 或用倒代换等.

2. 关于不定积分的计算, 我们已经分别在第一章和第二章讲完了. 第一章着重讲了换元积分法和分部积分法 (这是求不定积分最基本的两个方法), 最后导出了常用积分表. 第二章讨论了几类可以表为有限形式的不定积分. 在求这几类积分时, 常要用到第一章的内容.

3. 不定积分的计算有哪些用途呢? 主要用来求定积分、广义积分和其它各类积分(重积分, 线积分, 面积分等), 以及求解常微分方程. 求解最简单的常微分方程, 我们在第一章第三节已有初步了解, 进一步的内容将在本丛书《常微分方程基础》一书中讲到. 利用不定积分去计算定积分和广义积分, 属于本书下面几章的内容. 至于其它各类积分的计算, 将在本丛书《多元函数微积分》一书中讨论.

[附] 关于求和号"Σ"

在下一章开始之前, 为学习定积分作准备, 我们先介绍求和号"Σ"的使用:

设有数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

它的前 n 项的和是

$$a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

为了书写简便, 我们常使用求和号"Σ", 而将此和数记作

$$\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad 或 \quad \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sum_{l=1}^{n} a_l.$$

有时为了需要, 也可写作

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}, \quad 或 \quad \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}.$$

尽管记号略有不同，其实质是完全一样的，都代表和数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

有了求和号，许多求和式子都可以简写.

【例 1】 $x_1^2\cdot\Delta x_1+x_2^2\cdot\Delta x_2+\cdots+x_n^2\cdot\Delta x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\Delta x_i.$

【例 2】 $f(\xi_1)\cdot\Delta x_1+f(\xi_2)\cdot\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\cdot\Delta x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$

【例 3】 $\sum\limits_{i=1}^{n}i=1+2+\cdots+n.$

【例 4】 $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=1^2+2^2+\cdots+n^2.$

【例 5】 $\sum\limits_{i=1}^{n}1=1+1+\cdots+1=n$ （n 个 1 相加）.

思考题

1. 试将和数

$$V(\tau_1)\cdot\Delta t_1+V(\tau_2)\cdot\Delta t_2+\cdots+V(\tau_n)\cdot\Delta t_n$$

用求和号 Σ 表示.

2. 解释下列各式的含义：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\pm\sum\limits_{i=1}^{n}b_i.$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}c\cdot a_i=c\sum\limits_{i=1}^{n}a_i.$

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}c=c\sum\limits_{i=1}^{n}1=nc.$

3. 用数学归纳法证明：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}i=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

4. 设 $f(x)=x^2$， $\xi_i=\dfrac{i-1}{n}$， $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，证明

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

第三章

定 积 分

在前面两章，作为求导数(或微分)的反问题，我们引进了不定积分，讨论了它的概念、计算及简单应用．这属于积分学的第一个基本问题．本章所要讲的定积分，属于积分学的第二个基本问题．这类问题的实际背景很丰富，例如求任意平面图形的面积，求变速直线运动的路程，求变力所做的功等等．初看起来，这些问题与微分学所讨论的问题以及积分学第一个基本问题都没有什么联系；在历史上，定积分的发展起初也是完全独立的．直到十七世纪，牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)在前人大量研究工作的基础上，先后发现了定积分和不定积分的联系，才推动了积分学大大向前发展，使之成为解决实际问题的有力工具．

本章着重讨论定积分的概念、理论和计算，下一章将讨论定积分的应用．

第一节 定积分的概念

1.1 两个例子

与导数的概念一样，定积分的概念也是在分析、解决实际问题的过程中逐渐形成的．作为定积分概念的几何模型与物理模型，我们举两个例子．

【例 1】 曲边梯形的面积．

在生产实践和科学技术的许多实际问题里，经常需要计

算平面图形的面积. 例如: 测量河水的流量,需要计算河床横断面的面积. 设计船体,需要计算水线面(用水平面去截满载船体时所得的截面)的面积. 建造溢流坝(水电站闸门下的一种坝)时, 要根据坝的体积备料, 就需要计算溢流坝的横断面面积. 这些都是求由曲线所围成的平面图形(为方便起见, 简称为"曲边形")的面积问题.

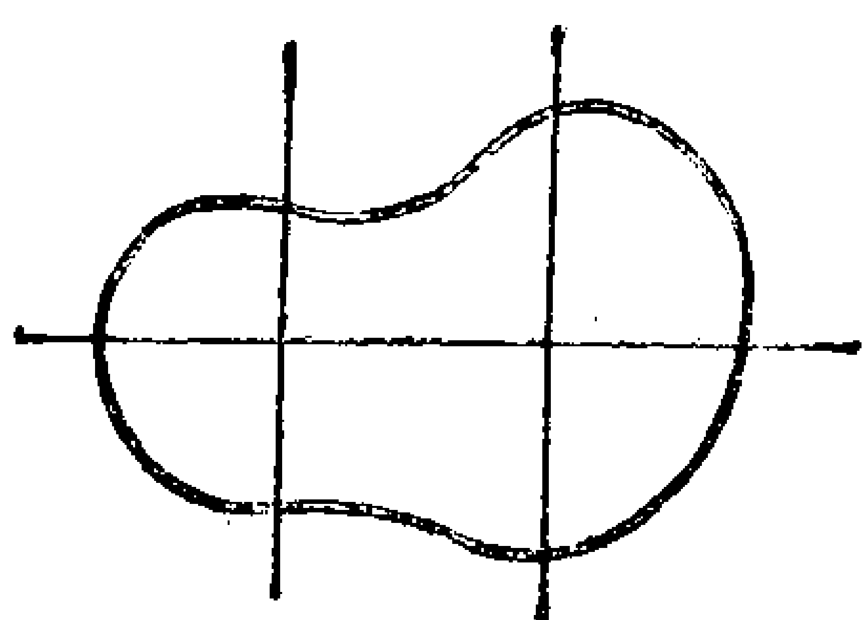


图 3-1

由于任何曲边形都可以用互相垂直的两组直线分成若干个曲边梯形*)(图 3-1), 因此, 只要会求曲边梯形的面积, 也就会求一般曲边形的面积了.

下面我们来讨论曲边梯形面积的求法.

假设曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$, x 轴以及直线 $x=a$, $x=b$ 所围成. 如图 3-4. 求它的面积 A.

在初等数学中, 我们会计算三角形、矩形、多边形这样一些直边形的面积, 而不会计算曲边梯形的面积. 困难在哪里? 就在于有一条边是曲的. 这种"曲"与"直"的矛盾, 应该怎样解决呢?

---

*) 所谓曲边梯形, 是指这样的图形, 它有三条边是直线, 其中两条互相平行, 第三条与前两条互相垂直, 第四条边是一段曲线弧, 它与任意一条平行于其邻边的直线至多交于一点(图 3-2). 曲边梯形的特例是曲边三角形: 两条平行的边中, 有一条缩成了一点(图 3-3).

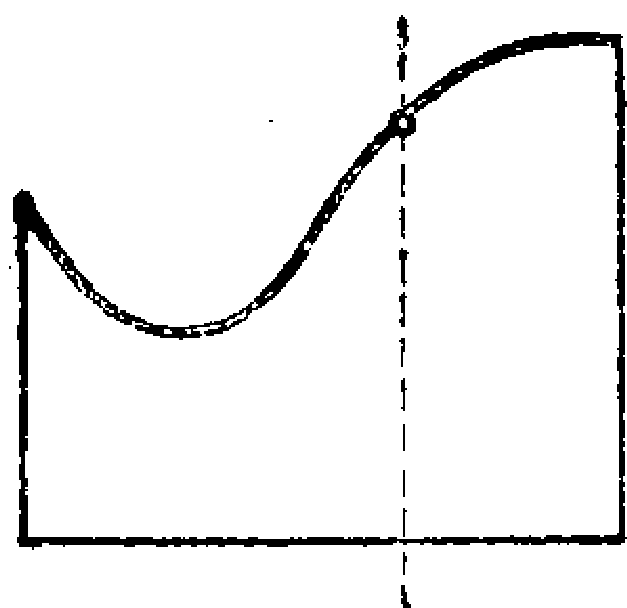


图 3-2



图 3-3

大家可以回忆一下圆的面积是怎样计算的．设有一个半径为 r 的圆．考虑它的内接正 n 边形的面积 $S_n(n=3, 4, 5, \cdots)$，它是圆面积 S 的近似值．当边数 n 无限增多时，S_n 的极限就是圆面积：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \pi r^2.$$

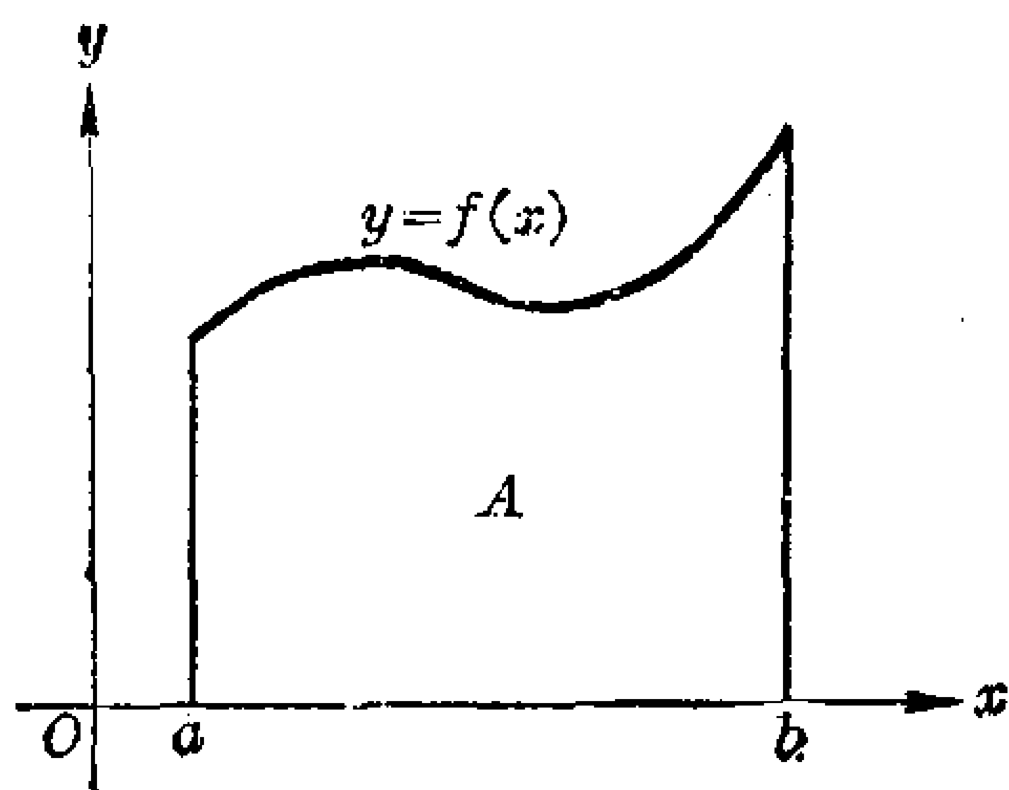


图 3-4

这种用圆内接正多边形的面积来推算圆面积的方法，我国古代数学家刘徽早在公元第三世纪就在他的“割圆术”中提出来了．他说：“割之弥细，所失弥少．割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．”他按照这个想法，从半径为1的圆内接正六边形的面积开始，一直计算到圆内接正一百九十二边形的面积，得到了圆周率的近似值：$\pi\approx3.14$．

现在我们计算曲边梯形的面积，可以从这里得到启发．这就是说，我们只需把大曲边梯形分小，分成若干个小的曲边梯形，对于每一个小曲边梯形，用一个矩形——直边形去代替它．所有小矩形面积的总和，就是大曲边梯形面积的近似值．分得越细，近似程度越高，而当每个小曲边梯形的宽度趋于零时，就得到了大曲边梯形面积的精确值．把这种想法具体化，就是下面的四步．

① 分割：把区间 $[a, b]$ 任意分成 n 个小区间，设分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

于是每个小区间的长度是

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

它们不一定相等．

过每个分点 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 作平行于 y 轴的直线，把原曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，记它们的面积分别为

$$\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_n.$$

② 近似代替——"以直代曲"：由于 $y=f(x)$ 是连续函数，所以只要分割足够细密，使得每个小曲边梯形都很"窄"，便可用小矩形——直边形去代替小曲边梯形，这个小矩形与小曲边梯形同底，而以这底边上任一点处的函数值为高．即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

其中点 ξ_i 是小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的任意一点，即 $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，如图 3-5 所示．

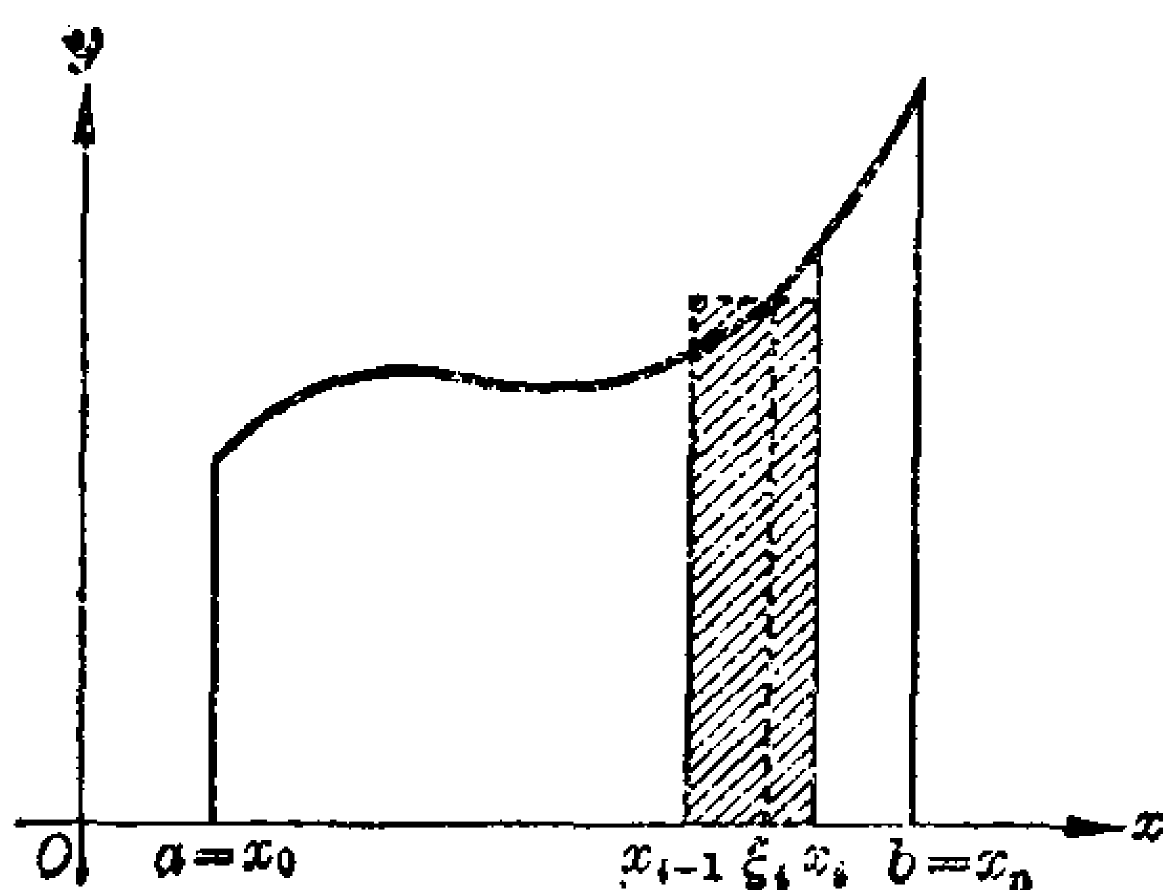


图 3-5

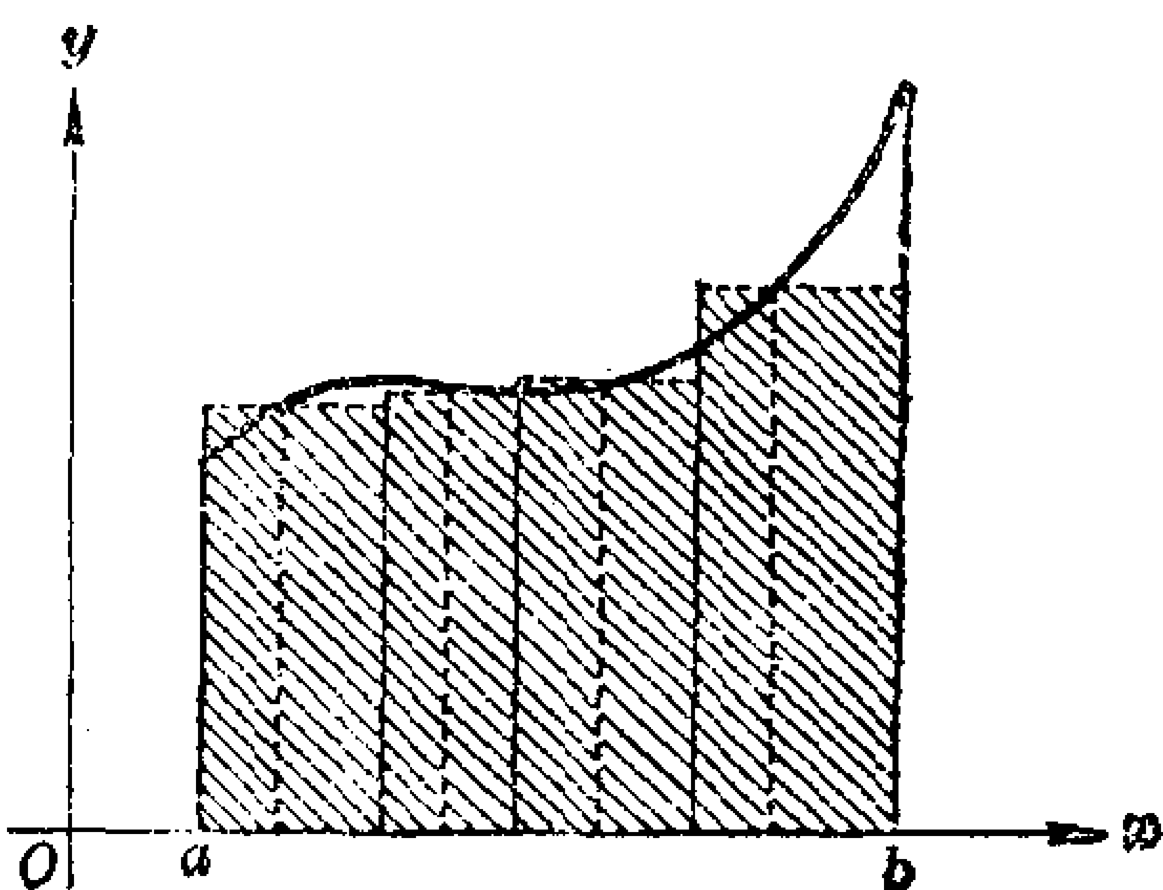


图 3-6

③ 求和：将 n 个小矩形的面积加起来，得到"阶梯形面积"(图 3-6 中所有带阴影的面积之和)，它是原曲边梯形面积 A 的一个近似值：

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n$$
$$\approx f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n,$$

即
$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

④ 取极限：容易了解，阶梯形面积——和数 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

既依赖于区间$[a, b]$的分割，也依赖于中间点$\xi_i(i=1, 2, \cdots, n)$的取法。但是，很明显，分割越细，和数$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$与面积$A$的误差就越小。因此，为了求得$A$的精确值，应当将区间$[a, b]$无限地细分下去，使每个小区间的长度$\Delta x_i(i=1, 2, \cdots, n)$都趋于零。当$\Delta x_i\to 0(i=1, 2, \cdots, n)$时，和数的极限就是曲边梯形的面积，即

$$A=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

为了方便，记$\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$中的最大者为$\lambda$，那么，$\lambda\to 0$就能刻划$\Delta x_i\to 0(i=1, 2, \cdots, n)$。因此，上式又可以写为

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

以上四步，简单说来就是先设法在局部范围内"以直代曲"，求得面积A的近似值——阶梯形面积；然后，通过取极限，求得A的精确值，从而解决了初等数学所无法解决的求曲边梯形的面积问题。

思考题 试求由抛物线$y=x^2$，直线$x=1$以及x轴所围成的曲边三角形的面积。

[提示：将区间$[0, 1]$ n等分，并且每个中间点$\xi_i(i=1, 2, \cdots, n)$都取成小区间的右(或左)端点。]

【例2】 变速直线运动的路程。

设某物体作直线运动，它的速度是不均匀的，也就是说，速度v随着时间t而改变，是时间t的函数：$v=v(t)$。假定$v(t)$是t的连续函数，试求物体在时间间隔$[a, b]$内所走过的路程s。

我们知道，当物体作匀速直线运动时，路程公式是

$$路程=速度\times时间.$$

现在，速度不是均匀的(即速度不是常量)，而是变化的(即速度是变量)，这就遇到了“变”与“不变”的矛盾. 为了解决这个矛盾，我们仿照例1作如下分析：从整个过程看，运动是变速的，但是，从短暂的局部过程看，由于 $v(t)$ 是 t 的连续函数，因此，运动近似于匀速的. 也就是说，在时间间隔很短的情况下，可以“以不变代变”，把变速运动近似看成匀速运动，求得路程的近似值；然后，在时间间隔无限变小的过程中，求近似值的极限，得到路程的精确值，从而解决初等物理所无法解决的问题. 具体步骤如下.

① 分割：任意分割区间 $[a, b]$ 为 n 个小区间，设分点为

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b.$$

每个小区间的长度为

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}\quad(i=1, 2, \cdots, n).$$

设物体在第 i 个时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 内所走过的路程为 $\Delta s_i(i=1, 2, \cdots, n)$.

② 近似代替——“以不变代变”：在时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一个时刻 $\tau_i\,(t_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant t_i)$，以物体在时刻 τ_i 的速度 $v(\tau_i)$ 去近似代替变化的速度 $v(t)$，得到物体在这段时间里所走过的路程 Δs_i 的一个近似值：

$$\Delta s_i\approx v(\tau_i)\cdot\Delta t_i\quad(i=1, 2, \cdots, n).$$

③ 求和：把这些近似值加起来，得到总路程 s 的一个近似值：

$$\begin{aligned}s&=\Delta s_1+\Delta s_2+\cdots+\Delta s_n\\&\approx v(\tau_1)\cdot\Delta t_1+v(\tau_2)\cdot\Delta t_2+\cdots+v(\tau_n)\cdot\Delta t_n,\end{aligned}$$

即

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\cdot\Delta t_i.$$

④ 取极限：很明显，分割越细，总误差越小．因此，将区间$[a, b]$无限地细分下去，使每个$\Delta t_i \to 0 (i=1, 2, \cdots, n)$，和数$\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\cdot\Delta t_i$的极限就是路程$s$的精确值，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\cdot\Delta t_i.$$

其中λ是诸$\Delta t_i(i=1, 2, \cdots, n)$中的最大者，即

$$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}.$$

$\lambda\to 0$表示对区间$[a, b]$的无限细分．

1.2 定积分的定义

以上两个例子，一个属于几何领域，一个属于物理领域．我们看到，尽管它们的具体内容不同，遇到的矛盾却是相同的，都是“变”与“不变”或“直”与“曲”的矛盾．解决矛盾的方法和步骤也是相同的．反映在数量关系上，都是要求计算某个整体量，最后也都归结为求某个固定结构的和数的极限．类似的实际问题还有很多．撇开实际内容，把它们在数量关系上的共性加以概括和抽象，便得到了定积分的概念．

定义 设函数$f(x)$定义在区间$[a, b]$上．用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将区间$[a, b]$任意分成n个小区间，每个小区间的长度是

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\quad(i=1, 2, \cdots, n),$$

记

$$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}.$$

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上，任意取一点$\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作乘积

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\quad(i=1, 2, \cdots, n).$$

将所有这些乘积加起来，得到和数

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

这个和数称为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的积分和. 显然，它既依赖于区间$[a, b]$的分割，又依赖于中间点$\xi_i(i=1, 2, \cdots, n)$的取法.

令$\lambda\to 0$，如果积分和σ_n有极限I，这个I与区间$[a, b]$的分割无关，与中间点的取法也无关，那么，就称此极限值I为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上(或从a到b)的定积分，记作

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

其中$f(x)$称为被积函数，x称为积分变量，$f(x)dx$称为被积表达式，$[a, b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限，"$\int$"称为积分号.

当$f(x)$在$[a, b]$上的定积分存在时，我们就说$f(x)$在$[a, b]$上是可积的.

有了定积分概念以后，上面两个例子都可以用定积分来表示.

在第一个例子中，曲边梯形的面积A是曲边函数$y=f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，即

$$A=\int_a^b f(x)dx,$$

这里$f(x)\geqslant 0$.

在第二个例子中，作变速直线运动的物体所经过的路程s，是速度函数$v=v(t)$在时间区间$[a, b]$上的定积分

$$s=\int_a^b v(t)dt.$$

最后，我们说明一下：出现在这两个例子中的函数$f(x)$，$v(t)$都是连续的，而定义中的被积函数并不要求一定连续，这

是为了使定积分的应用范围可以更加广泛的缘故。

1.3 定积分的几何意义

当 $f(x)\geqslant 0$ 时，上面已经指出，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示曲边方程为 $y=f(x)$ 的曲边梯形的面积(图 3-7)：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=A.$$

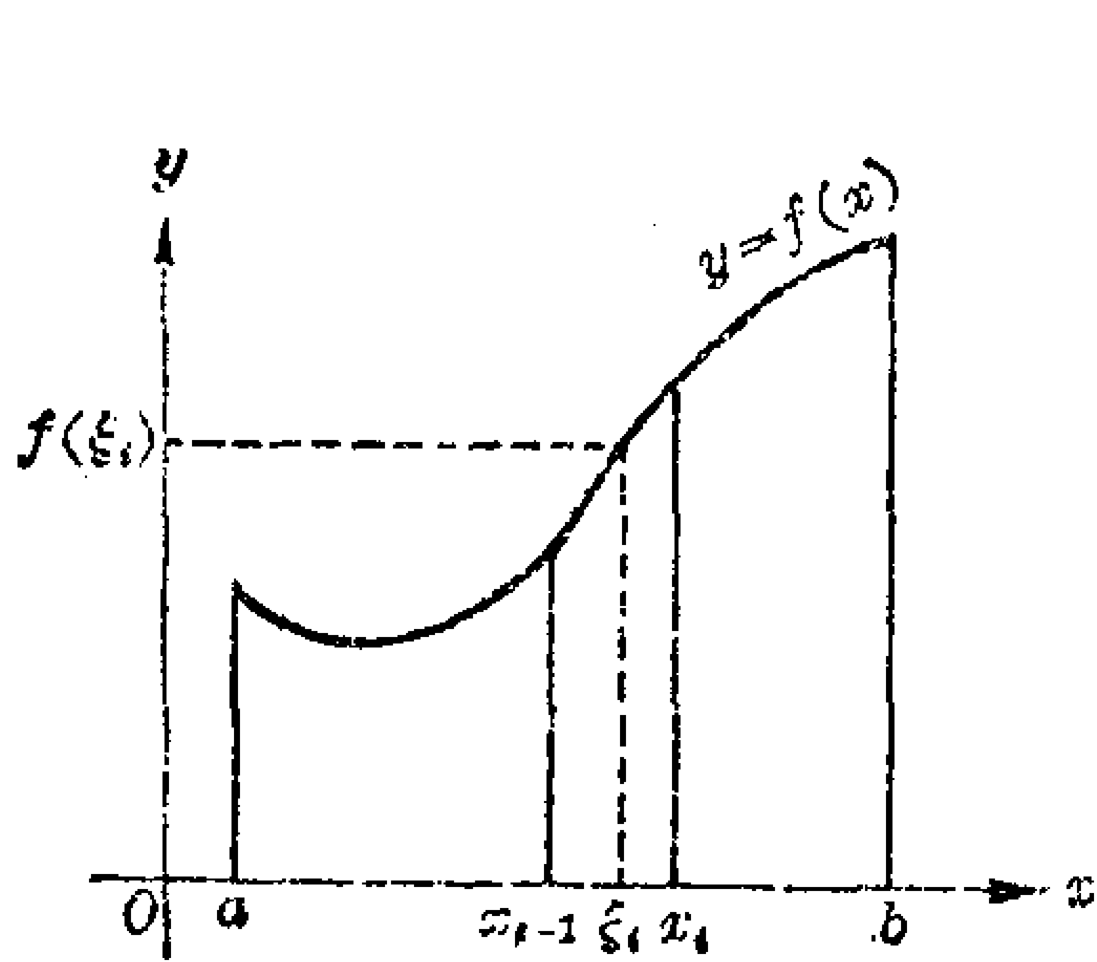


图 3-7

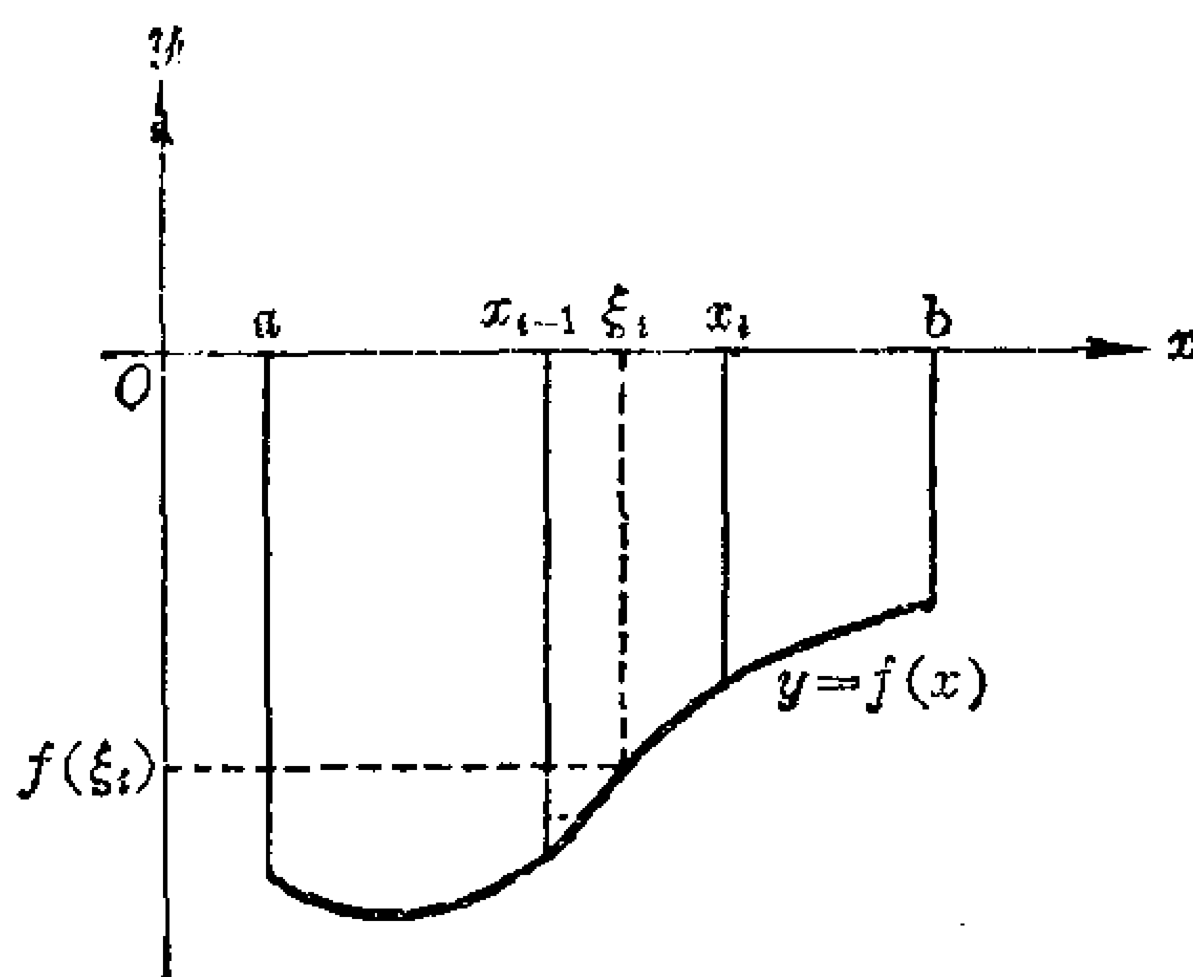


图 3-8

当 $f(x)\leqslant 0$ 时，则 $-f(x)\geqslant 0$，因而曲边方程为 $y=f(x)$ 的曲边梯形的面积 A 应该是(图 3-8)

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\cdot\Delta x_i.$$

由极限的性质，知负号可以提出来，于是

$$A=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=-\int_a^b f(x)dx.$$

从而

$$\int_a^b f(x)dx=-A.$$

也就是说，当 $f(x)\leqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是曲边梯形的面积再加一个负号。

当$f(x)$在$[a,b]$上有正有负(图 3-9)时，则定积分应该是由曲线$y=f(x)$及直线$x=a$, $x=b$, $y=0$所围成的几个曲边梯形的面积的代数和. 例如,对于图 3-9, 有

$$\int_a^b f(x)dx=S_1-S_2+S_3-S_4+S_5.$$

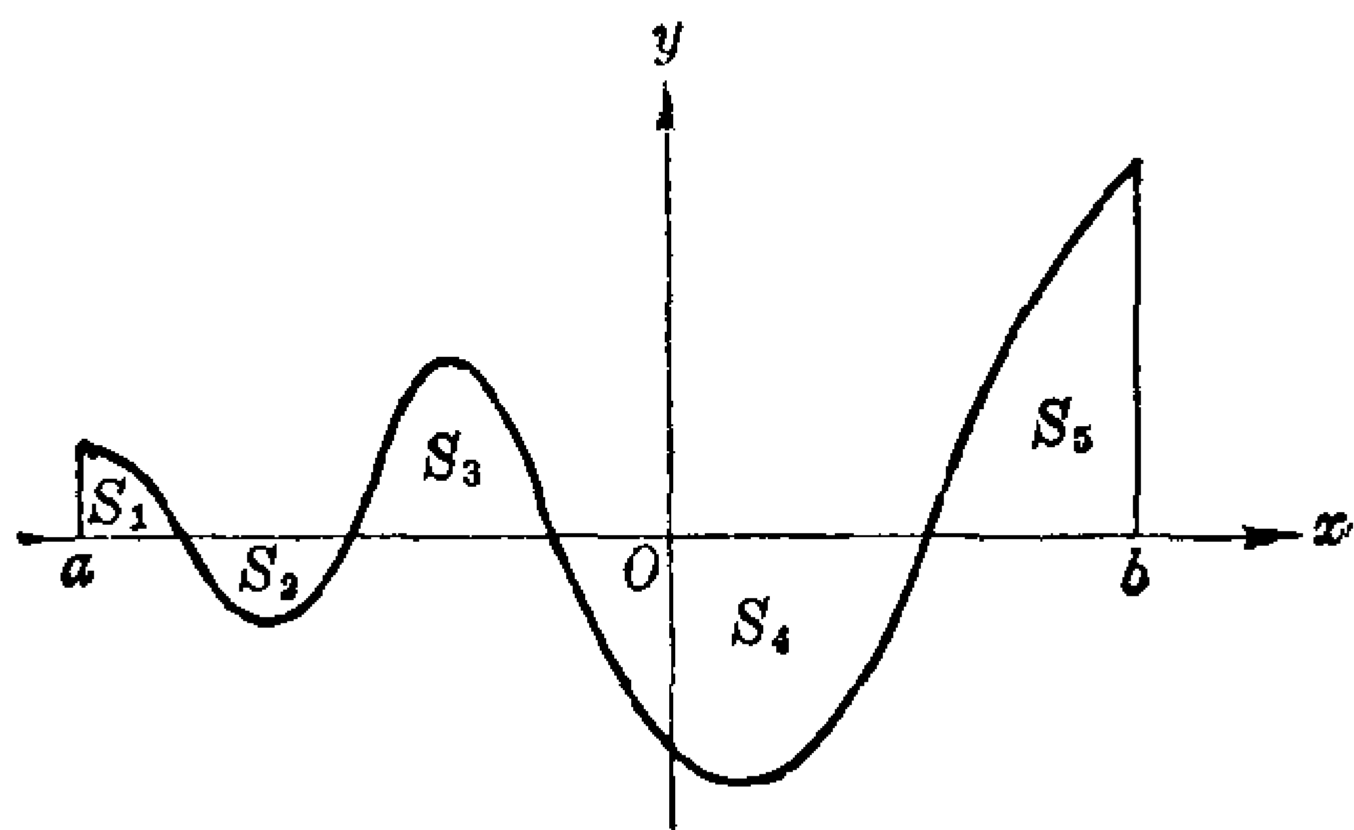


图 3-9

1.4 关于定积分概念的两点说明

(1) 定积分是一个数，它的值仅仅取决于被积函数与积分上、下限,而与积分变量的记号无关. 即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du.$$

这是因为定积分作为积分和的极限，它仅仅由被积函数所表示的规律以及积分区间所决定，至于自变量采用什么记号,对极限值并无任何影响. 正如表达式

$$\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{i^2},\quad \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k^2},\quad \sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n^2},$$

都表示和数 $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{20^2}$$

一样.

从定积分的几何意义,也很容易了解这一点:曲边梯形的

面积，显然只取决于曲边相对于底边的形状以及底边的长短，而不会因为把自变量轴记成 x 轴或 t 轴、u 轴就有什么不同．

(2) 在定积分的定义中，下限 a 总是小于上限 b 的．当 $a>b$，或 $a=b$ 时，记号 $\int_a^b f(x)dx$ 表示什么，并无定义．但为了今后使用方便，我们规定：

当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$；

当 $a=b$ 时，$\int_a^a f(x)dx=0$．

作了这样的规定之后，不论 $a<b$，$a>b$ 或 $a=b$，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 都有意义了．

1.5 关于函数的可积性

从函数的可积性的定义，很容易得到下面的推论．

推论 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界．

【证】 假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界，则对于任何分割

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

至少在一个部分区间 $[x_{k-1}, x_k]$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 上，函数 $f(x)$ 是无界的．因此，在这个区间上可以选取一点 ξ_k，使得 $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ 的绝对值足够大，从而使得积分和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 大于(或小于)任意预先给定的正数(或负数)，这样，积分和就不可能有极限，也就是说，$f(x)$ 是不可积的．这说明：无界函数一定不可积，于是证明了可积函数必定是有界的． ∎

这个推论给出了函数可积的一个必要条件．以后，凡是讨论到函数的可积性问题，总先假定函数是有界的．

但是必须注意，函数有界只是函数可积的必要条件，而不是充分条件. 换句话说，有界函数不一定都是可积的. 请看下面的例子.

【例 3】 证明狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数;}\\ 0, & x\text{ 是无理数,}\end{cases}$$

在任意区间$[a, b]$上都是不可积的.

【证】 用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将区间$[a, b]$任意地分为 n 个部分区间. 对于区间$[x_{i-1}, x_i]$，取 ξ_i 为其中的有理数(任何两个数之间都有有理数)，则 $D(\xi_i)=1(i=1, 2, \cdots, n)$，从而积分和

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i=b-a;$$

如果取 ξ_i 为$[x_{i-1}, x_i]$中的无理数(任何两个数之间都有无理数)，则 $D(\xi_i)=0$, 从而积分和

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i=0.$$

这说明，对于中间点 $\xi_i(i=1, 2, \cdots, n)$的不同取法，积分和没有相同的极限，因而 $D(x)$是不可积的. ▌

这个例子说明：狄利克雷函数 $D(x)$在$[a, b]$上虽然是有界的，但是却不可积.

至此，大家自然会问：什么样的函数是可积的呢？我们有下面的重要定理.

定理 1 区间$[a, b]$上的连续函数在$[a, b]$上是可积的.

定理 2 区间$[a, b]$上只有有限个间断点的有界函数在$[a, b]$上是可积的.

定理 3 区间 $[a, b]$ 上的单调有界函数在 $[a, b]$ 上是可积的.

这几个定理给出了函数可积的充分条件. 它们的证明要用到实数域的完备性(或连续性)和闭区间上连续函数的性质, 比较复杂, 我们在这里就不叙述了. 读者若希望了解, 可以参考一些专为综合性大学数学系写的数学分析教科书的有关章节(如江泽坚、吴智泉、周光亚合编数学分析上册的第四章第 2 节).

所有上面提到的"可积", 也称为黎曼 (Riemann) 可积. 这是因为上述意义下的可积, 在历史上是由黎曼给出的. 因此, 定积分也称为黎曼积分.

1.6 一个根据定义求定积分的例

【例 4】 求由抛物线 $y=x^2$, 直线 $x=1$ 以及 x 轴所围成的曲边三角形的面积 S(图 3-10).

解: 在上面第一段例 1 的思考题中, 我们曾提示大家将区间 $[0, 1]$ n 等分, 并取中间分点为小区间的右(或左)端点. 现在取左端点, 计算如下.

① 将区间 $[0, 1]$ n 等分, 分点为

$$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1.$$

每个小区间的长度都是 $\frac{1}{n}$.

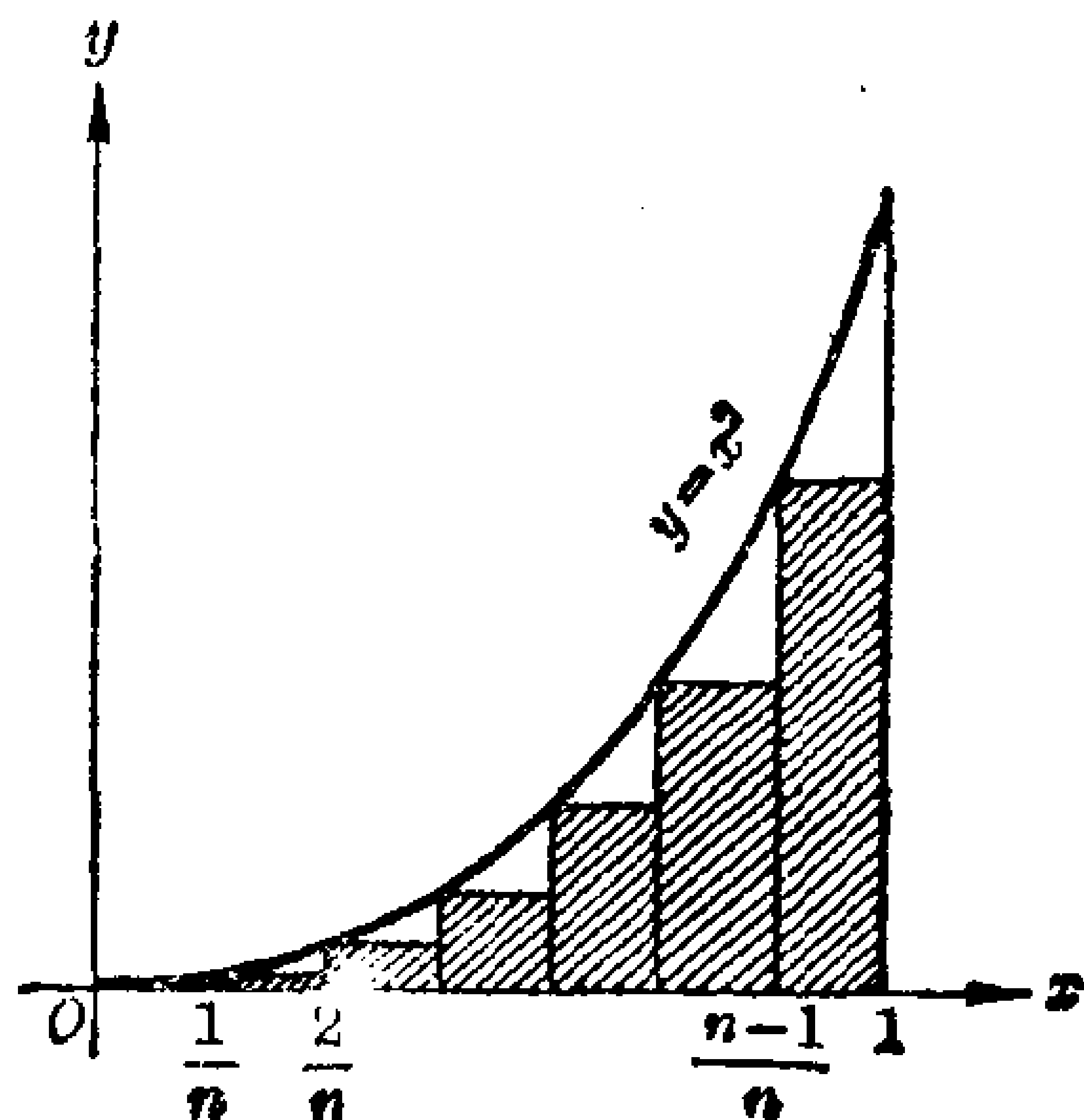


图 3-10

过每个中间分点 $x_i=\frac{i}{n}$

$(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 作平行于 y 轴的直线，把原曲边三角形分成 n 个小曲边梯形，记它们的面积为

$$\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_n.$$

② 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]=\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ 上，取中间点 ξ_i 为区间的左端点，即

$$\xi_i=\frac{i-1}{n} \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

则小矩形的面积是

$$\xi_i^2 \cdot \Delta x_i=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}=\frac{(i-1)^2}{n^3} \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

它是小曲边梯形面积 ΔA_i 的一个(不足)近似值.

③ 将 n 个小矩形的面积加起来，得到阶梯形面积(图3-10中带阴影的面积之和)，它是所求曲边三角形面积 A 的一个(不足)近似值:

$$\begin{aligned}A&=\Delta A_1+\Delta A_2+\cdots+\Delta A_n\\&\approx\frac{(1-1)^2}{n^3}+\frac{(2-1)^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2.\end{aligned}$$

④ 令 $\lambda=\max\limits_{1<i<n}\{\Delta x_i\}=\frac{1}{n}\to 0$，即 $n\to+\infty$，便得到曲边三角形面积

$$A=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2.$$

根据上一章最后附录部分的思考题3，知

$$A=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}.$$

问：如果中间点取为小区间的右端点，则结果怎样?

习 题 一

1. 定积分 $\int_0^\pi \sin x\,dx$ 的几何意义是什么?

2. 根据定积分的几何意义,证明:

   (1) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$;

   (2) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_a^{a+2\pi} \sin x\,dx$ (a 是任何数).

3. 根据定积分的定义,证明:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

   再从定积分的几何意义,解释这个结果.

4. 计算由抛物线 $y=x^2$,直线 $x=1$, $x=3$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

5. 自由落体的速度 $v=gt$(g 是重力加速度),试根据定积分定义,计算前5秒内落体所落下的距离.

6. 设有一质量分布不均匀的细棒,长度为 l. 假定细棒在点 x 处的线密度为 $\rho(x)$,试用定积分表出细棒的质量 m.

7. 由定积分定义,证明:

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a) \quad (k\text{ 是常数}).$$

   特别地,当 $k=1$,有:

$$\int_a^b dx = b-a.$$

8. 由定积分定义,证明:

   (1) $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$;　　(2) $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

第二节　定积分的基本性质

为了进一步讨论定积分的理论和计算,在这一节里,我们先介绍定积分的几个基本性质.

性质 1(常数因子提出来)　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，k 是任意常数，则 $k\cdot f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积，并且

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

【证】　由定积分定义，知

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$\xlongequal{\text{由已知}} k\int_a^b f(x)dx. \quad ▮$$

性质 2(一项一项分开积)　若 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积，并且

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

【证】　由定积分定义，有

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\cdot\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \pm g(\xi_i)\cdot\Delta x_i]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$\xlongequal{\text{由已知}} \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \quad ▮$$

性质 1, 2 可合并写为

$$\int_a^b [kf(x)\pm hg(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx \pm h\int_a^b g(x)dx$$

(其中 k, h 是常数),

称为定积分的线性性质.

【例 1】 $\int_a^b(2x-5x^2)dx=2\int_a^b x\,dx-5\int_a^b x^2dx$

$$=2\cdot\frac{b^2-a^2}{2}-5\cdot\frac{b^3-a^3}{3}$$

$$=b^2-a^2-\frac{5}{3}(b^3-a^3).$$

性质 3（定积分的可加性） 设 $f(x)$ 从 a 到 b、从 a 到 c 以及从 c 到 b 都是可积的，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \qquad (1)$$

【证】 ① 先证 $a<c<b$ 的情形(图 3-11).

因为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积，所以不论怎样分割 $[a,\ b]$，积分和的极限都是不变的. 我们取 c 为一个分点，于是 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的积分和应该等于 $f(x)$ 在 $[a,\ c]$ 与 $[c,\ b]$ 上的积分和之和，即

$$\sum_{[a,b]}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{[a,c]}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i+\sum_{[c,b]}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

令 $\lambda\to0$，上式两端取极限，由已知条件，就得到(1)式:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

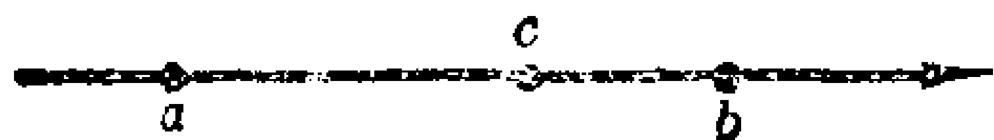


图 3-11



图 3-12

② 当 $a<b<c$(图 3-12)时，根据情形①，有

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx.$$

移项，即得(1)式:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx$$
$$=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

对于 a, b, c 的其它分布情况，例如 $b<c<a$，或 $b<a<c$，$c<a<b$，$c<b<a$，可以类似地证明.

总之，不论 a, b, c 的相对位置如何，等式(1)恒成立. 这个性质称为定积分的可加性.

【例 2】 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+1, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ x, & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

求 $\int_0^3 f(x)\,dx$.

解：因为 $f(x)$ 是分段函数，所以定积分也要分段来求. 由性质 3，有

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^2\left(\frac{x}{2}+1\right)dx+\int_2^3 x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx+\int_0^2 1dx+\int_2^3 x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2^2-0^2)+2+\frac{1}{2}(3^2-2^2)=5\frac{1}{2}.$$

【例 3】 求 $\int_0^2 |1-x|\,dx$.

解：因为

$$|1-x|=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1;\\ x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

实际上是分段函数，所以定积分也要分段求. 由性质 3，知

$$\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 |1-x|dx + \int_1^2 |1-x|dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$

$$= \int_0^1 1dx - \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 1dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(1^2-0^2) + \frac{1}{2}(2^2-1^2) - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1.$$

性质 4 若 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且 $f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx, \tag{2}$$

这里 $a<b$.

【证】 因为 $f(x) \leqslant g(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$，所以对于区间 $[a, b]$ 的任意分割以及中间点 $\xi_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 的任意取法，都有

$$f(\xi_i) \leqslant g(\xi_i) \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

从而 $$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (a<b).$$

令 $\lambda \to 0$，两边取极限，由 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积性，得

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leqslant \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

即

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx,$$

这里 $a<b$. 】

当 $a>b$ 时，不等式(2)要反向.

推论 1 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且 $f(x) \geqslant 0$，又 $a<b$，则

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0. \tag{3}$$

推论 2 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中 m, M 是常数，则有不等式

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{4}$$

推论 1，2 留给读者自己证明.

注意，当 $a>b$ 时，不等式(3)，(4)都要反向.

性质 5 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{5}$$

这里 $a<b$.

【证】 由绝对值的性质，有

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

利用性质 4，得到

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx^{*)},$$

从而有

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx^{**)},$$

这里 $a<b$. 】

思考题 不等式(2)，(3)，(4)，(5)的几何意义是什么？

上述不等式，在估计某些定积分的值时，是很有用处的.

【例 4】 试估计定积分

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

的值.

---

*) 从 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，可以推出 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积. 它的证明要用到函数可积的充要条件，此处从略.

**) 这是因为 $-a \leqslant x \leqslant a$ 与 $|x| \leqslant a$ 等价.

解：为了估计积分值 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$，先设法找出函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值 M 与最小值 m. 为此，我们考查 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性. 易知

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - \operatorname{tg} x) \cdot \cos x}{x^2},$$

在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\cos x > 0$，$x < \operatorname{tg} x$，因此 $f'(x) < 0$，从而 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调下降的.

这样，$f(x)$ 的最大值 M 必在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的左端点 $x = \frac{\pi}{4}$ 处达到，即

$$M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

而 $f(x)$ 的最小值 m 必在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的右端点 $x = \frac{\pi}{2}$ 处达到，即

$$m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}.$$

因而在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上，有

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

由不等式(4)，得到

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即
$$0.50\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant 0.71.$$

性质 6(积分第一中值定理)　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积并且不变号，则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ，使得下式成立

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx, \tag{6}$$

其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$.

【证】　由假设，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号，不妨设 $g(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$.

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，所以有最大值与最小值，分别记为 M, m, 于是

$$m\leqslant f(x)\leqslant M\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

而 $g(x)\geqslant 0$, 因此

$$m\cdot g(x)\leqslant f(x)\cdot g(x)\leqslant M\cdot g(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

已知 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，由不等式(2)，便得到

$$\int_a^b m\cdot g(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\leqslant\int_a^b M\cdot g(x)\,dx^{*)},$$

---

*) 从 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，可以推出 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 证明要用到函数可积的充要条件，此处从略.

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (7)$$

由于 $g(x)\geqslant 0$，由性质 4 的推论 1，知

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0.$$

若 $\int_a^b g(x)\,dx = 0$，则由不等式(7)，知有

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = 0,$$

从而对于任意的 $\xi(a\leqslant\xi\leqslant b)$，(6)式都成立。

若 $\int_a^b g(x)\,dx > 0$，用它去除(7)式，得到

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

数 $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$ 既是 M 与 m 之间的一个值，由闭区间上连续函数的介值定理，知在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi) = \mu,$$

即

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$

亦即

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx,$$

其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$.

这就是所要证明的. ▌

当 $g(x)\leqslant 0$，(6)式也成立，证明留给读者。

【例5】 利用积分第一中值定理，估计积分值：$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$.

解：在积分第一中值定理中，取$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$，$g(x)=x^2$，则由(6)式，得到

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx=\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\cdot\frac{1}{3},$$

其中$0\leqslant\xi\leqslant1$.

显然，当$\xi=0$时，$\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}=1$，是函数$\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$在[0, 1]上的最大值，而当$\xi=1$时，$\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，是$\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$在[0,1]上的最小值，即有

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}<1 \quad (0\leqslant\xi\leqslant1).$$

从而
$$\frac{1}{3\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\cdot\frac{1}{3}<\frac{1}{3} \quad (0\leqslant\xi\leqslant1).$$

即
$$\frac{1}{3\sqrt{2}}<\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx<\frac{1}{3}.$$

推论 当$g(x)\equiv1$时，(6)式变成

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a) \quad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

这个推论很重要，我们把它重新叙述一下，并称它为

积分学中值定理 若$f(x)$在$[a, b]$上连续，则至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a), \tag{8}$$

其中$a\leqslant\xi\leqslant b$.

(8)式的几何意义很清楚：当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 表示曲边 $y=f(x)$ 之下的曲边梯形 $AabB$ 的面积，而 $f(\xi)\cdot(b-a)$ 表示以 $[a, b]$ 为底，以 $f(\xi)$ 为高的矩形 $EabD$ 的面积. (8)式说明：在曲边梯形的所有变化的高度 $f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 之中，至少有一个高度 $f(\xi)$ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$，使得以 $f(\xi)$ 为高的同底矩形与曲边梯形有相同的面积(图 3-13). 因此，$f(\xi)$ 称为曲边梯形的平均高度. 我们也称

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分平均值.

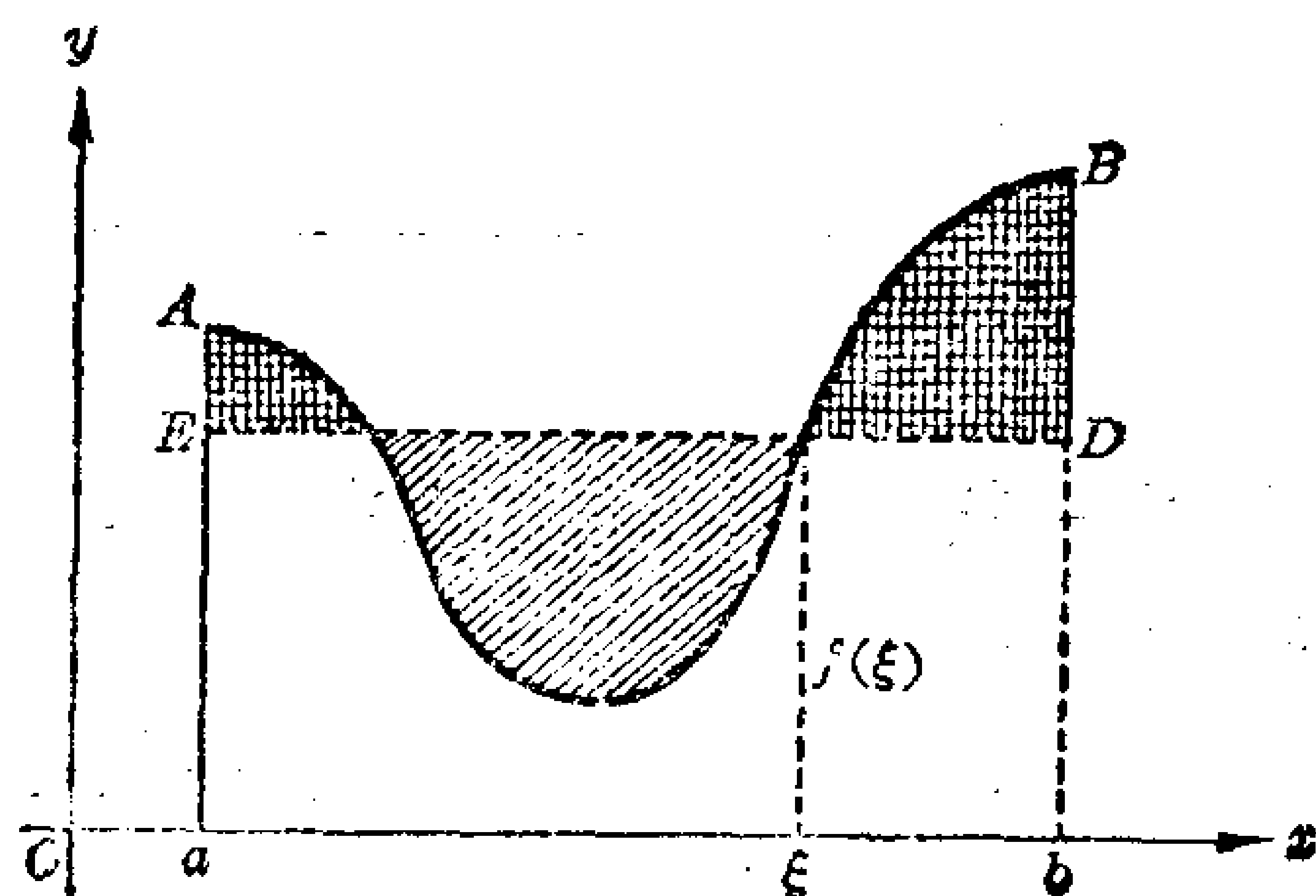


图 3-13

【例 6】 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

求 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的积分平均值.

解：由积分平均值的定义，再利用性质 3，有

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 1dx\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+1\right]=\frac{2}{3}.$$

此处的中间点 ξ 很容易求得(见图 3-14)：

因为
$$\xi^2=\frac{2}{3},$$

所以
$$\xi=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0.816.$$

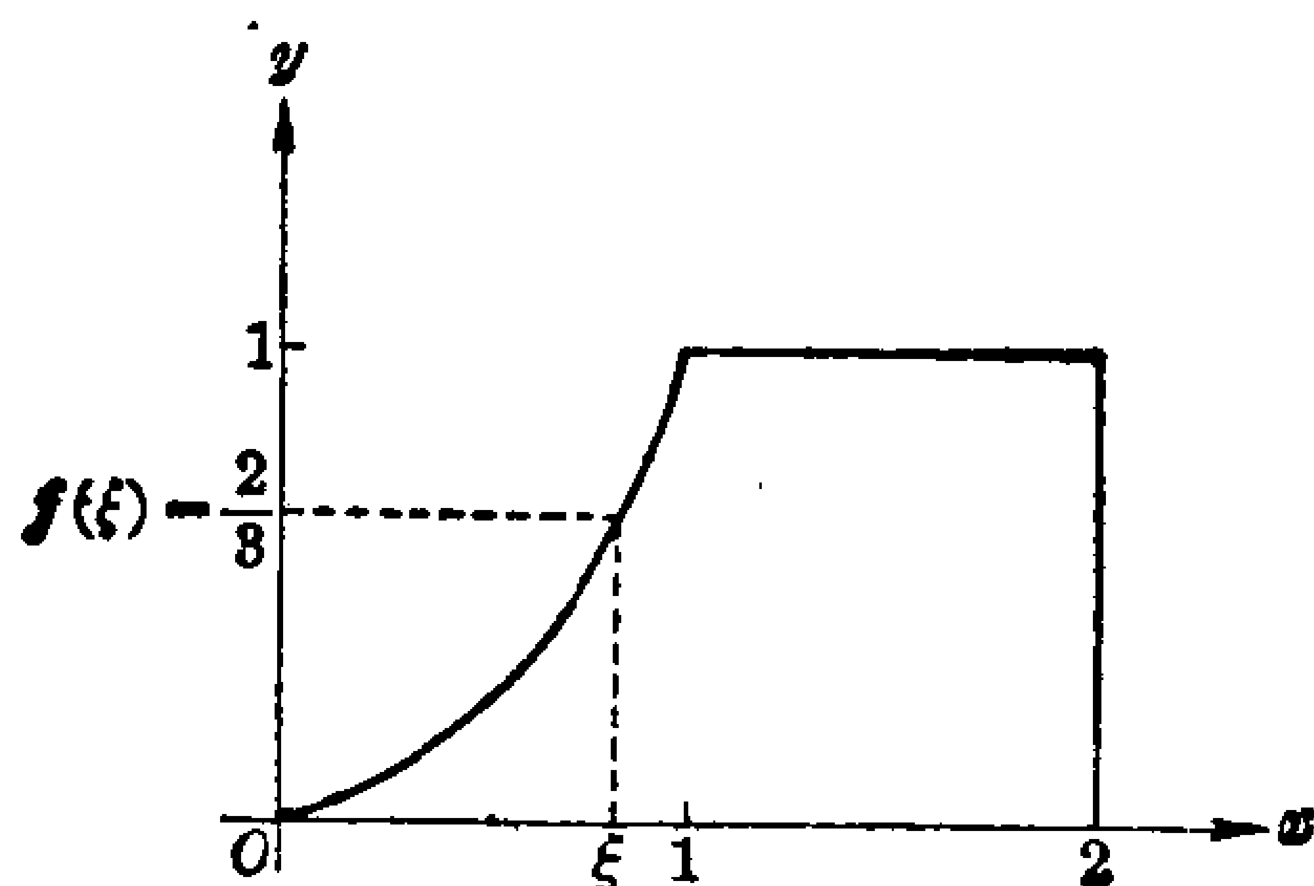


图 3-14

必须指出：在一般情形下，只知道中间点 ξ 在理论上是存在的，具体数值却不知道.

思考题 我们知道，函数 $f(x)$ 的积分平均值 $f(\xi)$ 是唯一的，问：点 ξ 是否也唯一？试举例说明.

习 题 二

1. 利用定积分的性质 4, 比较下列积分的大小：

(1) $\int_0^1 xdx,\ \int_0^1 x^2dx,\ \int_0^1 x^3dx;$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10} x\,dx;$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx;$　　(4) $\int_0^1 e^{-x}dx,\ \int_0^1 e^{-x^2}dx;$

(5) $\int_3^4 \ln x\,dx,\ \int_3^4 \ln^2 x\,dx;$　　(6) $\int_1^2 \ln x\,dx,\ \int_1^2 \ln^2 x\,dx.$

2. 设$f(x)$是$[a, b]$上的单调上升的有界函数，证明

$$f(a)\cdot(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant f(b)\cdot(b-a).$$

并给予几何解释.

3. 设$f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上可积，证明

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\right],$$

这里$a<b$.

4. 利用不等式(4)，估计下列各积分值：

(1) $\int_1^4 (x^2+1)dx$; (2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$;

(3) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

5. 利用不等式(4)，证明：

(1) $\frac{2}{5}\leqslant\int_1^2\frac{x\,dx}{x^2+1}\leqslant\frac{1}{2}$; (2) $1\leqslant\int_0^1 e^{x^2}dx\leqslant e$.

6. 利用积分第一中值定理，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x\,dx=0.$$

7. 求$f(x)=|x|$在$[-1, 1]$上的积分平均值. 并给以几何解释.

8. 设$f(x)$在$[a, b]$上可积，试证：改变$f(x)$在区间端点处的函数值，它的可积性不会被破坏，积分值也不会改变. 即：

若$f(x)$在$[a, b]$上可积，且

$$g(x)\equiv f(x)\quad(a<x<b),$$

则
$$\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

9. 设有n个常数$a_1, a_2, \cdots, a_n$. 试求"阶梯函数"

$$f(x)=\begin{cases}a_1, & 0\leqslant x<1,\\ a_2, & 1\leqslant x<2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n-1}, & n-2\leqslant x<n-1,\\ a_n, & n-1\leqslant x\leqslant n\end{cases}$$

在区间$[0, n]$上的积分平均值. 并由所得结果进一步考虑积分平

均值与通常的算术平均值的关系，从而说明函数在某个区间上的积分平均值概念可以看作有限个数的算术平均值概念的发展或推广。

10. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，但 $f(x)\not\equiv 0$（即 $f(x)$ 不恒等于零），又 $a<b$，试证

$$\int_a^b f(x)dx>0.$$

并由此推出：

若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x)\leqslant g(x)$，但 $f(x)\not\equiv g(x)$，又 $a<b$，则

$$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx.$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，证明：若 $\int_a^b f^2(x)dx=0$，则在 $[a, b]$ 上，$f(x)\equiv 0$.

注意：在证明第10、11两题时，连续性的条件不可缺少．否则是可以举出反例的．

第三节　微积分基本定理

3.1　微积分基本公式

我们已经讨论了定积分概念的由来以及定积分的基本性质，知道定积分是很有用、很重要的数学工具．但是，到目前为止，我们还只会根据定义来计算定积分，这就需要计算积分和的极限．我们从第一节例4已经看到，即使被积函数很简单，这样的计算也比较复杂．并且对于不同的被积函数还须有特殊的计算方法，无疑这是很困难的．因此，必须寻求计算定积分的简便而统一的方法．这就是下面要介绍的微积分基本公式．它把定积分的计算化成不定积分的计算，揭示了定积分与不定积分的内在联系，在解决定积分计算的问题上，大

大前进了一步.

在介绍微积分基本公式之前，先考查物体的变速直线运动，可以从中得到启发.

第一节例 2 告诉我们：若物体的运动速度是 $v=v(t)$，则物体在时间间隔 $[a, b]$ 内所经过的路程是

$$\int_a^b v(t)dt.$$

另一方面，如果知道物体运动的规律，即路程函数 $s=s(t)$，也就是在任意时刻 t，物体到起始点的距离，那么这段路程显然等于

$$s(b)-s(a).$$

因此，有

$$\int_a^b v(t)dt=s(b)-s(a),$$

这里，$v(t)$ 与 $s(t)$ 的关系是

$$s'(t)=v(t).$$

这一事实启发我们去考虑如下的问题：

对于一般的可积函数 $f(x)$，如果有另一个函数 $F(x)$，满足 $F'(x)=f(x)$，那么，是否也有公式

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

呢？回答是肯定的．这就是下面的

定理（微积分基本公式） 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，而 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可微，且 $F'(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{1}$$

右端也可记作 $F(x)\big|_a^b$．公式(1)称为微积分基本公式.

【证】 用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将区间$[a, b]$任意分成n个小区间.

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$上,对函数$F(x)$运用微分学中值定理,得到

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\cdot\Delta x_i=f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$
$$(x_{i-1}<\xi_i<x_i)\quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

将这n个式子加起来,得到

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=[F(x_1)-F(x_0)]+[F(x_2)-F(x_1)]\\&\quad+\cdots+[F(x_{n-1})-F(x_{n-2})]+[F(x_n)-F(x_{n-1})]\\&=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,\end{aligned}$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=F(b)-F(a).$$

令$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$, 得到

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i&=\lim_{\lambda\to 0}[F(b)-F(a)]\\&=F(b)-F(a)\quad (\text{因为 } F(b)-F(a)\text{是常数}).\end{aligned}$$

已知$f(x)$在$[a, b]$上可积, 因此不论中间点ξ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$如何取法,所得积分和$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$的极限都是定积分$\int_a^b f(x)dx$, 即有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).\qquad ▮$$

微积分基本公式是由牛顿(Newton)、莱布尼兹(Leibniz)发现的,因此,也称为牛顿-莱布尼兹公式.

这个公式告诉我们: 要计算定积分$\int_a^b f(x)dx$, 只需先求出$f(x)$的任何一个原函数$F(x)$, 然后将$F(x)$在积分上限的值$F(b)$, 减去$F(x)$在积分下限的值$F(a)$. 这样,就把很广

泛的一类函数的定积分计算问题，化成了求被积函数的原函数的增量问题. 从这里，我们也可以看到不定积分的计算是很重要的.

【例 1】 求定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解：易知 $\frac{1}{3}x^3$ 是被积函数 x^2 的一个原函数. 由微积分基本公式，得到

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

对比第一节例 4，这里的作法显然方便多了.

【例 2】 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$.

解：因为

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \int \sin^3 x \, d(\sin x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + C,$$

所以由微积分基本公式有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{4}\sin^4 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[\sin^4 \frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{1}{4}.$$

【例 3】 求 $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{2x+1} dx$.

解：因为

$$\int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1} d(2x+1) = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-2} \frac{1}{2x+1} dx &= \frac{1}{2}[\ln|2x+1|]_{-3}^{-2} \\ &= \frac{1}{2}[\ln|-4+1| - \ln|-6+1|] \\ &= \frac{1}{2}[\ln 3 - \ln 5] = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

【例 4】 设

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ e^{-x}, & 1<x\leqslant 3.\end{cases}$$

求 $\int_0^3 f(x)dx$.

解：由于 $f(x)$ 是分段函数，因此定积分也要分段求.

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\int_1^3 e^{-x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-e^{-x}\Big|_1^3=\frac{2}{3}(1-0)-(e^{-3}-e^{-1})$$

$$=\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{e^3}-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{3}+\frac{e^2-1}{e^3}.$$

【例 5】 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

解：求原函数有两种方法：

(1) $$\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}d(\sqrt{x})$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}d(\sqrt{x})=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

(2) $$\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{-(x^2-x)}}dx$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]}}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}+C=\arcsin(2x-1)+C.$$

因而

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \arcsin \sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}$

$$= 2\left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \approx 0.3397 \quad \text{（查表）.}$$

(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \arcsin(2x-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}$

$$= \arcsin \frac{1}{3} - \arcsin 0 \approx 0.3397.$$

从这里我们看到：选取不同的原函数来计算定积分时，结果是一样的.

一般说来，若 $F(x)$，$G(x)$ 是 $f(x)$ 的两个不同的原函数，则有

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b,$$

$$\int_a^b f(x) dx = G(x) \Big|_a^b.$$

事实上，因为 $F(x)$ 与 $G(x)$ 只差一个常数，即有

$$F(x) = G(x) + C,$$

所以 $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = [G(x) + C]_a^b$

$$= G(x) \Big|_a^b + C \Big|_a^b = G(x) \Big|_a^b + 0 = G(x) \Big|_a^b.$$

【例 6】 汽车以每小时 32 公里的速度行驶，到某处需要减速停车. 设汽车以等减速度 $a = 2$ 米/秒^{2}刹车，问从开始刹车到停车，汽车走了多少距离？

解：我们知道，物体以速度 $v = v(t)$ 作直线运动时，在时间间隔 $[a, b]$ 内所走的距离可用定积分表示：

$$s = \int_a^b v(t) dt.$$

这里需要知道速度函数和所经过的时间. 因此，首先要算出刹车后汽车的速度. 当 $t=0$ 时，汽车刚开始刹车，这时速度为

$$v_0=32(\text{公里/小时})=\frac{32\times1000}{3600}=8.89(\text{米/秒}).$$

刹车后,汽车作匀减速运动,因而其速度为

$$v(t)=v_0-at=8.89-2t.$$

其次,需要求出从刹车开始到停车,经过了多少时间. 当汽车停住时，$v(t)=0$，故从

$$v(t)=8.89-2t=0,$$

解得
$$t=\frac{8.89}{2}=4.44(\text{秒}).$$

于是,在[0, 4.44]这段时间内,汽车所走过的距离是

$$s=\int_0^{4.44}(8.89-2t)\,dt=[8.89\,t-t^2]_0^{4.44}\approx19.76(\text{米}).$$

即在刹车后,汽车需走过19.76米才能停住.

【例7】 求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在[0, 64]上的积分平均值.

解：由第二节,知积分平均值为

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{64}\int_0^{64}\sqrt{x}\,dx$$

$$=\frac{1}{64}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^{64}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}.$$

从以上各例,我们初步看到了微积分基本公式的重要性. 它把原先的求积分和的极限这样一个复杂的定积分计算问题,归结为求被积函数的原函数问题,使得对于许多常见的函数来说,定积分的计算变得比较方便. 正是根据这一点,有时我们也利用定积分来求某些和式(如果可以把它看作某个函数的积分和的话)的极限.

【例 8】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解：显然，和式

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)n}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)n}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)n}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}.$$

考虑函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，它在[0, 1]上是连续的，因而是可积的．于是对于任意分割以及中间点的任意取法，所得积分和的极限都是 $\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$．现在，我们考虑一种特殊的分割：把[0, 1] n 等分，分点为

$$0=\frac{0}{n}<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1,$$

每个小区间的长度都相等，即 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．同时，把中间点 ξ_i 取成小区间的右端点，即

$$\xi_i=\frac{i}{n}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

于是积分和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

令 $\lambda=\frac{1}{n}\to 0$，即 $n\to\infty$，便得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

【例 9】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p\neq -1)$.

解：这个和式的极限也可以利用定积分来求.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{p+1}\ x^{p+1}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{p+1}\quad(p\neq -1).$$

习 题 三

1. 利用微积分基本公式计算下列定积分:

(1) $\int_a^b 1dx$;　　(2) $\int_a^b x^2dx$;

(3) $\int_a^b x^3dx$;　　(4) $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx$;

(5) $\int_{-1}^1 u^4du$;　　(6) $\int_0^3(3t^2-t+1)dt$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi$;

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\, dx$;

(9) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

(10) $\int_0^2 \frac{x^3}{x+1}\, dx$;

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos^3\theta\, d\theta$;

(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$;

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$;

(14) $\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \cdot \cos^3\varphi\, d\varphi$;

(15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\theta\, d\theta$;

(16) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$;

(17) $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\, dy$;

(18) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$;

(19) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\, dx$;

(20) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\, dx$;

(21) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx$;

(22) $\int_1^2 \frac{1}{x+x^2}\, dx$;

(23) $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}\, dx$;

(24) $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$;

(25) $\int_{-1}^1 |x|\, dx$;

(26) $\int_0^3 |2-x|\, dx$;

(27) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx$;

(28) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$.

2．用定积分计算下列各图中斜线部分的面积：

(1)

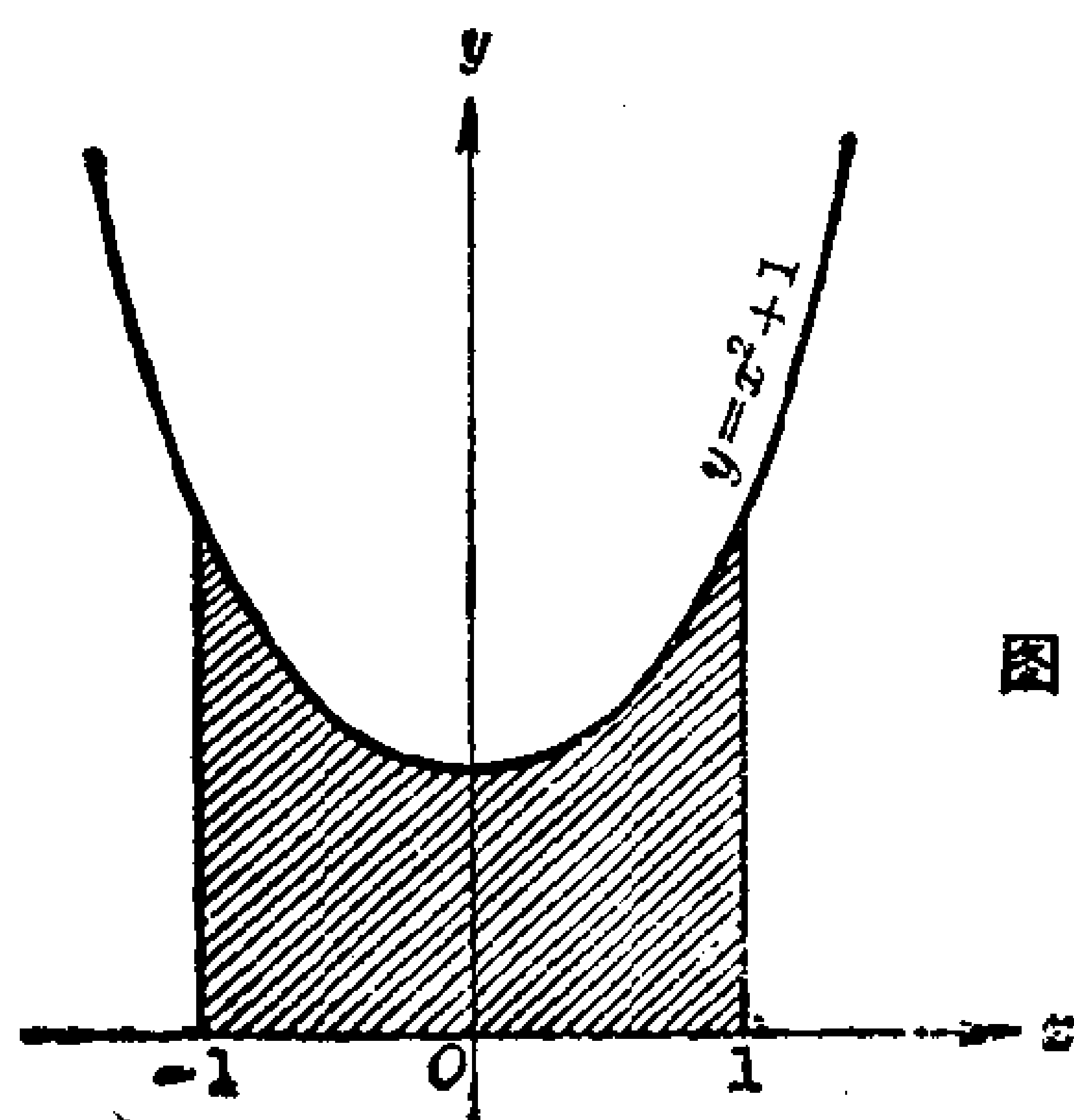


图 3-15

(2)

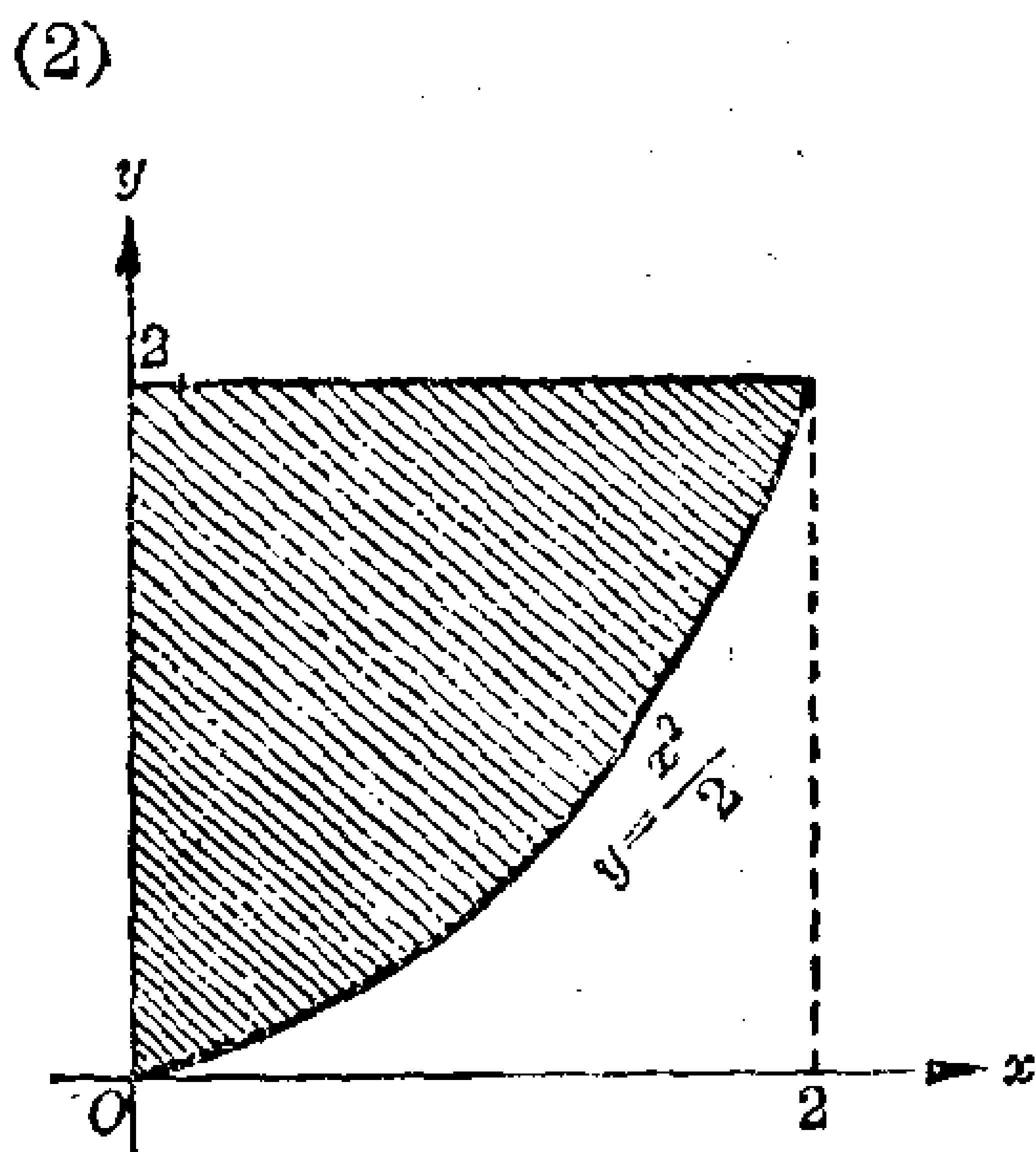


图 3-16

(3)

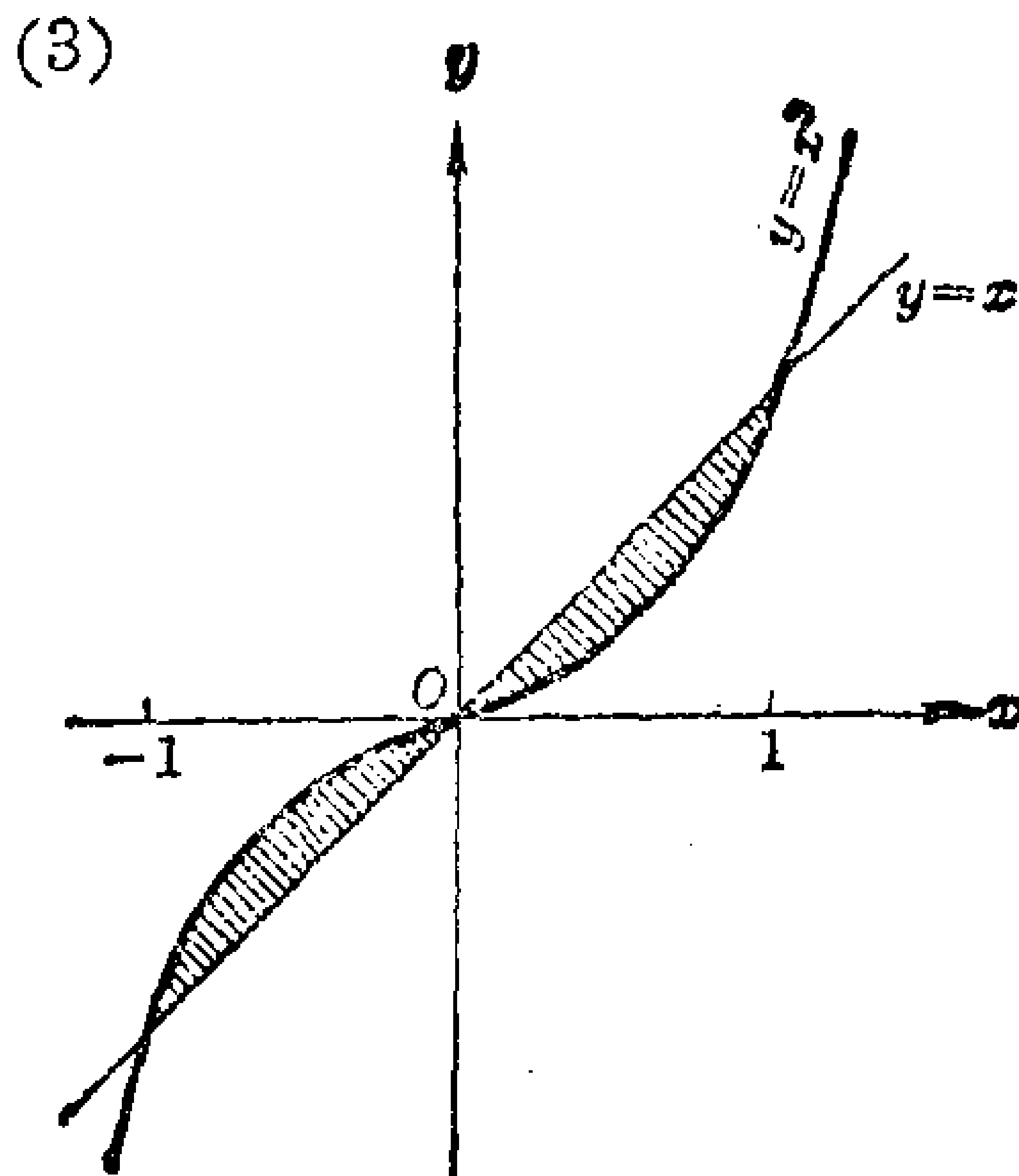


图 3-17

3．求下列函数在所给区间上的积分平均值：

(1) $f(x)=x^2$ 在$[0, 1]$上；

(2) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ 在$[0, 2\pi]$上；

(3) $f(x)=\sin x\cdot\sin(x+\varphi)$ 在$[0, 2\pi]$上；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+\varepsilon\cos x}$ 在$[0, 2\pi]$上$(0\leqslant\varepsilon<1)$。

4．利用第一积分中值定理估计积分 $\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$。

5．利用第一积分中值定理证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\,dx=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0\quad(p>0)$。

6．设 n 为正整数，证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0;\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0.$$

7．设 m, n 为正整数，证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ \pi, & m=n.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ \pi, & m=n.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0.$$

8. 对积分 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$ 能用牛顿-莱布尼兹公式吗？为什么？对积分 $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$ 呢？

9. 试利用牛顿-莱布尼兹公式与微分学中值定理证明积分学中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

10. 利用定积分求下列和式的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

3.2 微积分基本定理

上面我们讨论问题的角度是：如果可积函数 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，那么，定积分就可用下式求出来：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

但是，$f(x)$ 是什么样的函数，它才一定有原函数呢？换句话说，$f(x)$ 满足什么条件，它的原函数才必定存在呢？

这个问题，我们在第一章第一节的后面曾经说过，将留到第三章再讨论．现在，我们可以解决这一问题了．不过，需要先介绍变上限的定积分（即上限为变数的定积分）的概念．

1．变上限的定积分

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则对于任意的 $x(a \leqslant x \leqslant b)$，$f(x)$ 在 $[a, x]$ 上也可积*)，即定积分

*) 从 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，可以推出 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的任何一个部分区间上可积．证明要用到函数可积的充要条件，此处从略．

$$\int_a^x f(x)dx$$

存在．这是一个上限为变数的定积分．因为给定一个 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 后，就有一个积分值与之对应，所以 $\int_a^x f(x)dx$ 是上限 x 的函数，我们把它记作 $\Phi(x)$，即

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx.$$

在这里，右端的 x 既表示积分变量，又表示积分上限，容易混淆．因此，为了区别起见，不妨把积分变量换个字母，比如换成 t，这样，上式就写成

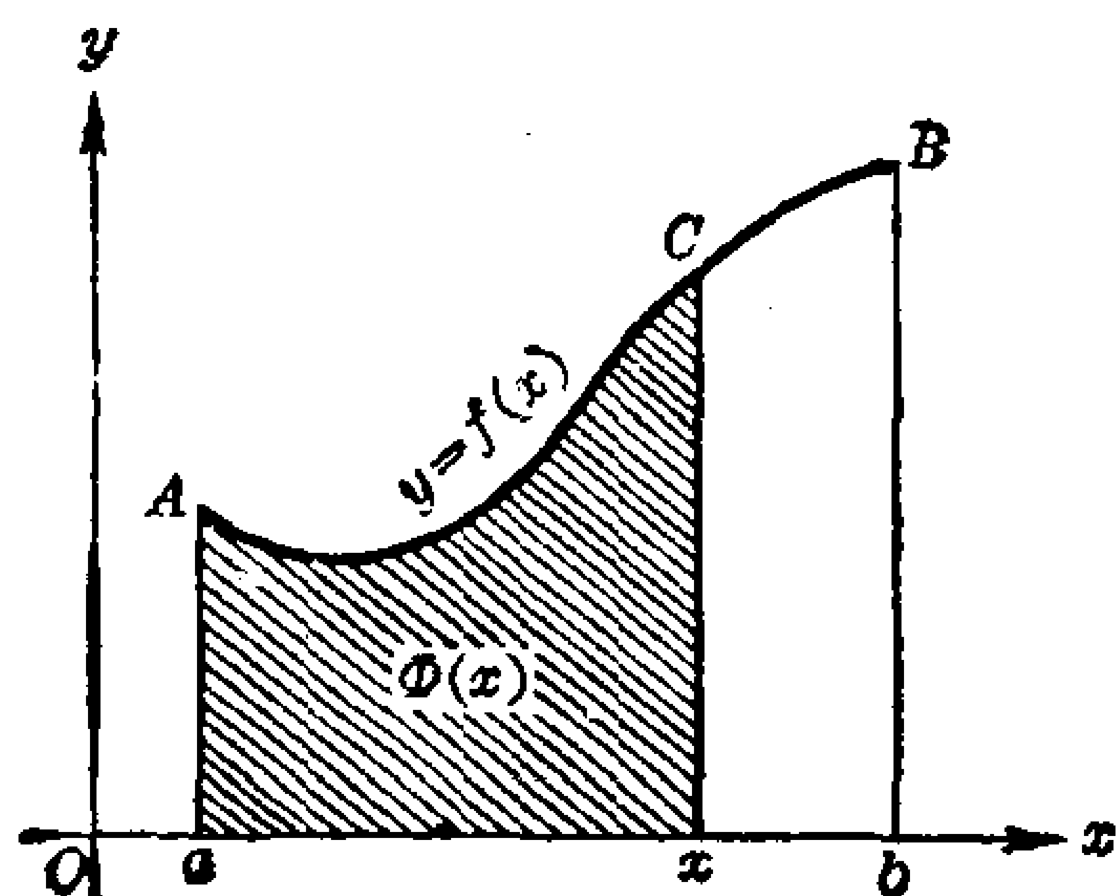


图 3-18

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

在几何上，函数 $\Phi(x)$ 代表右侧邻边可以变动的曲边梯形 $AaxC$ 的面积（图 3-18）．这个面积随右侧邻边的位置 x 而改变，并且，当 x 给定后，这条邻边就给定了，面积 $\Phi(x)$ 也随之而定，因而 $\Phi(x)$ 是 x 的函数，称为**面积函数**，有时也记作 $A(x)$．

在物理上，以速度 $v(t)$ 作直线运动的物体，在时刻 t 到起始点的距离是 $\int_a^t v(\tau)d\tau$（为了避免混淆，我们把积分变量记作 τ），这里 a 是运动的初始时刻．显然，$\int_a^t v(\tau)d\tau$ 也是变上限 t 的函数，记作 $s(t)$，即

$$s(t)=\int_a^t v(\tau)d\tau,$$

称为**路程函数**，或**距离函数**．

2. 微积分基本定理

关于函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，有两个基本的定理．在整个微积分学中，可以说它们是很基本很重要的．

定理 1（连续函数的原函数的存在性） 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

在 $[a, b]$ 上可微，并且

$$\Phi'(x)=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

即 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数．

【证】 由导数定义，知只需证

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

由函数 $\Phi(x)$ 的定义和定积分的性质 3，有

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt+\int_x^a f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

由积分学中值定理，得到

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\cdot\Delta x,$$

即

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(\xi)\cdot\Delta x,$$

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi),$$

其中 ξ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间．

令 $\Delta x\to 0$，则 $x+\Delta x\to x$，从而 $\xi\to x$，由函数 $f(x)$ 的连续性，便得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x),$$

即

$$\Phi'(x)=f(x).\quad]$$

定理 1 告诉我们：只要 $f(x)$ 是连续的，它就一定有原函数 $\Phi(x)$，并且这个原函数正是 $f(x)$ 的变上限的定积分，即有

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x).$$

换句话说，连续函数的原函数总是存在的．这就回答了我们在前面提出的问题：什么样的函数一定有原函数．

当然，$f(x)$ 连续只是 $f(x)$ 有原函数的充分条件，并不是必要条件．

定理 1 的物理意义非常清楚：

变上限的定积分 $s(t)=\int_a^t v(\tau)d\tau$ 是路程函数，它的导数

$$s'(t)=\frac{d}{dt}\left[\int_a^t v(\tau)d\tau\right]$$

正是速度函数 $v(t)$，即有

$$\frac{d}{dt}\left[\int_a^t v(\tau)d\tau\right]=v(t).$$

【例 10】 求 $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos^2 3t\,dt\right]$.

解：由定理 1，知

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos^2 3t\,dt\right]=\cos^2 3x.$$

【例 11】 求 $\frac{d}{dx}\left[\int_x^{-2}\sqrt[3]{t}\ln(t^2+1)dt\right]$.

解：由定积分的规定，知

$$\int_x^{-2}\sqrt[3]{t}\ln(t^2+1)dt=-\int_{-2}^x\sqrt[3]{t}\ln(t^2+1)dt.$$

再由定理 1，得

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^{-2}\sqrt[3]{t}\ln(t^2+1)dt\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[-\int_{-2}^{x}\sqrt[3]{t}\ln(t^2+1)dt\right]$$

$$=-\frac{d}{dx}\left[\int_{-2}^{x}\sqrt[3]{t}\ln(t^2+1)dt\right]=-\sqrt[3]{x}\ln(x^2+1).$$

【例 12】 求 $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^2}e^t dt\right]$.

解: 这里 $\int_0^{x^2}e^t dt$ 是 x^2 的函数,因而是 x 的复合函数. 令 $x^2=u$, 则有

$$\Phi(u)=\int_0^u e^t dt,\quad u=x^2.$$

由复合函数求导数的公式,知

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^2}e^t dt\right]=\frac{d}{dx}[\Phi(u)]=\Phi'(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=e^u\cdot 2x=2xe^{x^2}.$$

思考题 求 $\frac{d}{dx}\left[\int_{x^3}^{x^2}e^t dt\right]$

[提示: 先将 $\int_{x^3}^{x^2}e^t dt$ 写成

$$\int_{x^3}^{x^2}e^t dt=\int_{x^3}^{0}e^t dt+\int_0^{x^2}e^t dt=-\int_0^{x^3}e^t dt+\int_0^{x^2}e^t dt,$$

然后再参考例 12 的作法.]

定理 2(微积分基本公式) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任何一个原函数,则有微积分基本公式

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

【证】 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,又由定理 1,知

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

也是$f(x)$的一个原函数. 根据第一章, 两个原函数之间最多差一个常数C, 因此, 有

$$F(x)=\Phi(x)+C,$$

即

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C. \tag{2}$$

这个常数C很容易定出来:

在(2)式中, 令$x=a$, 则

$$F(a)=\int_a^a f(t)dt+C=0+C=C,$$

即

$$C=F(a).$$

代入(2)式, 得到

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+F(a),$$

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a).$$

特别地, 当$x=b$时, 有

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \quad \rbrack$$

在这里, 我们利用定理1给出了牛顿-莱布尼兹公式的另一证明. 但是, 定理2的条件比前面的强了一些. 如果单纯从牛顿-莱布尼兹公式的角度来看问题, 自然是条件越弱越好. 不过, 后一个证明所利用的定理1在理论上是非常重要的, 所以, 对于这后面一个证明, 大家也应该了解.

回顾第一章第二节第6段——简单初值问题. 在那里, 我们曾经介绍了简单初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x), \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$$

的解的唯一性。并且说过，解的存在性留待第三章再讨论。现在，我们学习了定理1——连续函数的原函数的存在性，就可以来解决这个问题了。

定理3（简单初值问题的解的存在性） 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$a \leqslant x_0 \leqslant b$，则在 $[a, b]$ 上，简单初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x), \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

的解一定存在。

【证】 由定理1，知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

显然，函数 $$\Phi_1(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

也是 $f(x)$ 的一个原函数 (事实上，

$$\Phi_1(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = \int_{x_0}^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^a f(t)\,dt + \Phi(x),$$

与 $\Phi(x)$ 只相差一个常数 $\int_{x_0}^a f(t)\,dt$)。另外，由条件

$$y' = f(x),$$

知 y 是 $f(x)$ 的原函数，因而 y 与 $\Phi_1(x)$ 相差一个常数 C，即有

$$y = \Phi_1(x) + C = \int_{x_0}^x f(t)\,dt + C. \tag{3}$$

常数 C 可由初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 定出：

将初始条件 $x = x_0$ 时 $y = y_0$ 代入(3)式，得

$$y_0 = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt + C = 0 + C,$$

$$C = y_0.$$

将 $C=y_0$ 代入(3)式，即得简单初值问题的解

$$y=\int_{x_0}^{x} f(t)dt+y_0 \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

这就证明了简单初值问题解的存在性. ∎

习 题 四

1. 求 $\Phi(x)=\int_0^x t\cos t\,dt$ 在点 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$ 处的导数.

2. 求

(1) $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x t\sqrt{1+t^2}\,dt\right]$;　　(2) $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x t^2\ln t\,dt\right]$ $(x>0)$;

(3) $\frac{d}{dx}\left[\int_x^2 e^{-t^2}dt\right]$;　　(4) $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt\right]$;

(5) $\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt\right]$;　　(6) $\frac{d}{dx}\left[\int_{\sin x}^{\cos x}\cos t^2\,dt\right]$;

(7) $\frac{d}{db}\left[\int_a^b \sin x^2\,dx\right]$;　　(8) $\frac{d}{da}\left[\int_a^b \sin x^2\,dx\right]$;

(9) $\frac{d}{dx}\left[\int_a^b \sin x^2\,dx\right]$.

3. 求函数 $\Phi(x)=\int_0^x\frac{3t+1}{t^2-t+1}dt$ 在[0, 1]上的最大值与最小值.

4. 用洛比达(l' Hospitale)法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\,dt}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{tg}\,t\,dt}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(\mathrm{arc\,tg}\,t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

第四节　定积分的换元积分法和分部积分法

到现在为止，我们利用微积分基本公式计算定积分时，总是先求出被积函数的一个原函数，然后将原函数在积分上限

的值减去它在积分下限的值．但是，在不少情况下，由于原函数可能比较复杂，因而这种计算是比较麻烦、困难的．如果再碰到原函数不能用不定积分的一般法则求得时，微积分基本公式便失效了．本节的目的，在于另外给出两个计算定积分的公式，这就是定积分的换元积分公式和分部积分公式．它们的证明比较简单，只需用到微积分基本定理和微积分基本公式．

4.1 定积分的换元积分法

定理1 设$f(x)$在$[a, b]$上连续．作变换$x=\varphi(t)$，它满足三个条件：

(1) 当$t=\alpha$时，$x=\varphi(\alpha)=a$，

当$t=\beta$时，$x=\varphi(\beta)=b$；

(2) 当t在$[\alpha, \beta]$上变化时，$x=\varphi(t)$的值在$[a, b]$上变化；

(3) $\varphi'(t)$在$[\alpha, \beta]$上连续．

则有换元积分公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt.$$

【证】 因为$f(x)$在$[a, b]$上连续，所以$f(x)$在$[a, b]$上的定积分存在，并且$f(x)$在$[a, b]$上有原函数（微积分基本定理），设为$F(x)$．于是由牛顿-莱布尼兹公式得

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

由条件，知$f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$在$[\alpha, \beta]$上连续，因而它在$[\alpha, \beta]$上的定积分也存在，并且它在$[\alpha, \beta]$上也有原函数．容易验证$F[\varphi(t)]$就是它的一个原函数．事实上，由复合函

数微分法，知

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)]=\frac{d}{dx}[F(x)]\cdot\frac{dx}{dt}=F'(x)\cdot\varphi'(t)$$
$$=f(x)\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t).$$

于是由牛顿-莱布尼兹公式得

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$
$$=F(b)-F(a),$$

从而得到 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt.$ ▌

这个公式与不定积分的换元积分公式很类似，所不同的是，后者最后需将变量还原，而现在只需把积分限作相应改变.

【例 1】 求 $\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$

解：为了去掉被积函数的根号，我们令

$$\sqrt{x}=t,\quad 从而\quad x=t^2.$$

于是

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{1+t},$$
$$dx=d(t^2)=2t\,dt.$$

定限：

当 $x=0$ 时，从变换 $\sqrt{x}=t$ 中解出 $t=0$；

当 $x=4$ 时，解出 $t=2$.

从而由定积分换元积分公式得到

$$\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int_0^2\frac{1}{1+t}\cdot 2t\,dt=2\int_0^2\frac{(1+t)-1}{1+t}dt$$
$$=2\int_0^2\left[1-\frac{1}{1+t}\right]dt=2[t-\ln|1+t|]_0^2$$
$$=2(2-\ln 3).$$

【例 2】 求 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解：令 $x=\sin t$，则

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$. 又

$$\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sin^4 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{\sin^4 t}{\sqrt{\cos^2 t}}=\frac{\sin^4 t}{\cos t}\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right),$$

$$dx=d(\sin t)=\cos t\,dt.$$

于是由换元积分公式,得到

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4 t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2 t)^2 dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos^2 2t\right]dt$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 4t}{2}dt$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}=\frac{1}{32}(3\pi-8).$$

例 1、例 2 都是作一适当代换，把换元公式的左端化到右端，这相当于不定积分的第二换元法．有时，我们也可能从右端往左端化，这相当于不定积分的第一换元法，不过，这时积分限也要作相应的改变.

【例 3】 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\cdot\sin x\,dx$.

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\cdot\sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,d(\cos x)$

$$\xlongequal{令\cos x=u}-\int_1^0 u^3\,du=-\frac{u^4}{4}\Big|_1^0=\frac{1}{4}.$$

【例 4】 求 $\int_0^{\ln 2}e^x(1+e^x)^2dx$.

解：$\int_0^{\ln 2}e^x(1+e^x)^2dx=\int_0^{\ln 2}(1+e^x)^2d(e^x)$

$$\xlongequal{令 e^x=u}\int_1^2(1+u)^2\,du=\frac{1}{3}(1+u)^3\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{3}(3^3-2^3)=\frac{19}{3}.$$

我们看到：利用定积分的换元积分公式时，不论从左端化到右端，还是从右端化到左端，都不必将变量还原，只须将积分限作相应的改变．当然，在例 3、例 4 中，如果积分变量并未改变，那么积分限也不应改变．例如：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\cdot\sin x\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,d(\cos x)$$

$$=-\frac{\cos^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}.$$



图 3-19

【例 5】 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

【证】 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$（图 3-19），则

当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$．又

$$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t,$$

$$dx=d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-dt.$$

于是由换元积分公式得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n t\cdot(-1)dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt,$$

即
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx.$$]

有一点应当说明：作代换 $x=\varphi(t)$ 时，第二个条件是"当 t 在$[\alpha,\ \beta]$上变化时，$x=\varphi(t)$ 的值在$[a,\ b]$上变化"（图 3-20），这里，把 t 的变化区间记作$[\alpha,\ \beta]$，而没有记作$[\beta,\ \alpha]$，不过是为了方便. 其实，α 也可能大于 β（如例 3 和例 5），见图 3-21.

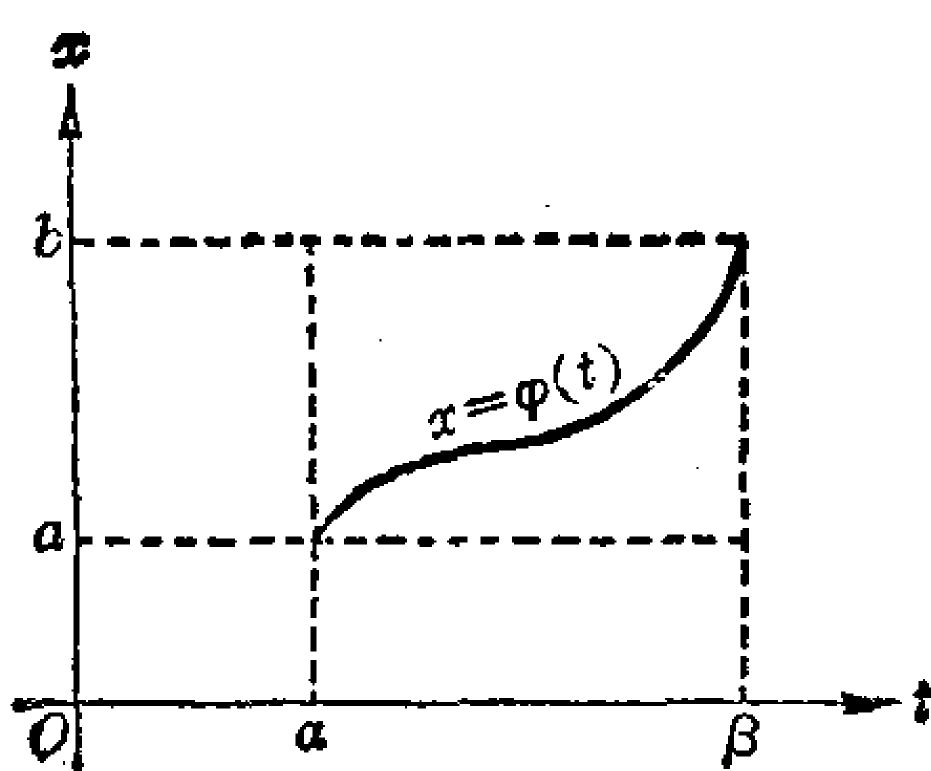


图 3-20

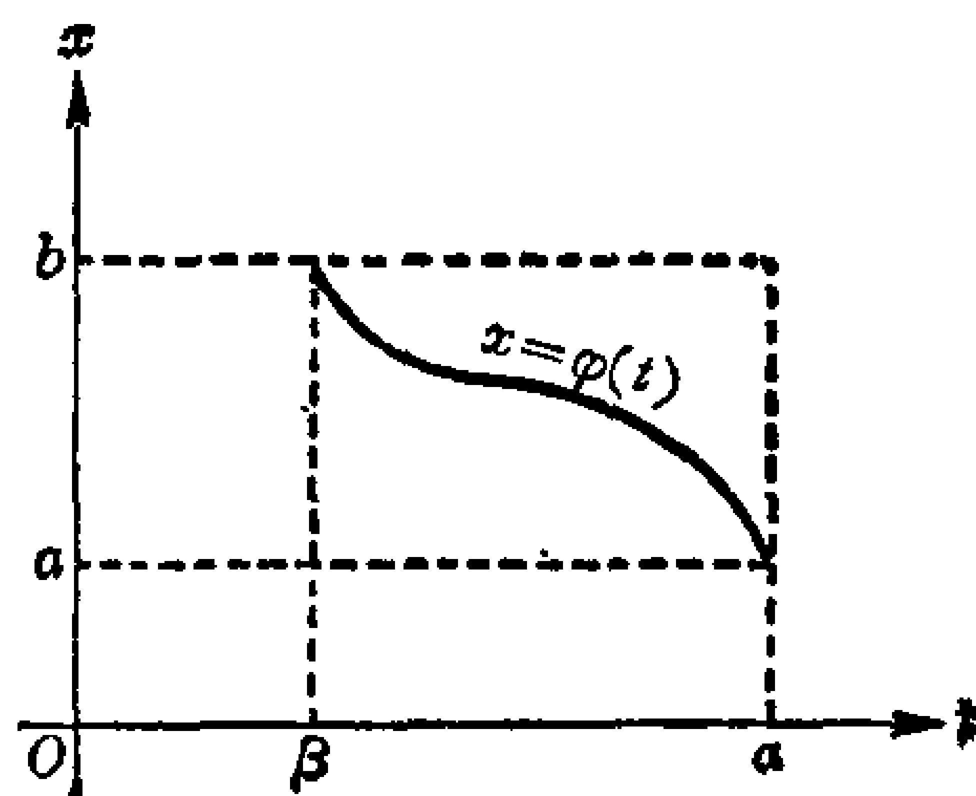


图 3-21

【例 6】（奇、偶函数在对称区间上的积分性质） 设 $f(x)$ 是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx;$$

若 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0.$$

即：偶函数在对称区间上的积分，等于半个区间上积分的两倍，奇函数在对称区间上的积分为零($f(x)$在$[-a,a]$上可积).

【证】 当$f(x)$为偶函数,即$f(-x)=f(x)$：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

由换元积分公式,有

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \xlongequal{\text{令 } x=-t} \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)\,dt$$

$$=-\int_{a}^{0} f(-t)\,dt=\int_{0}^{a} f(-t)\,dt$$

$$=\int_{0}^{a} f(t)\,dt=\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

因而 $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

此式有明显的几何意义,如下图:

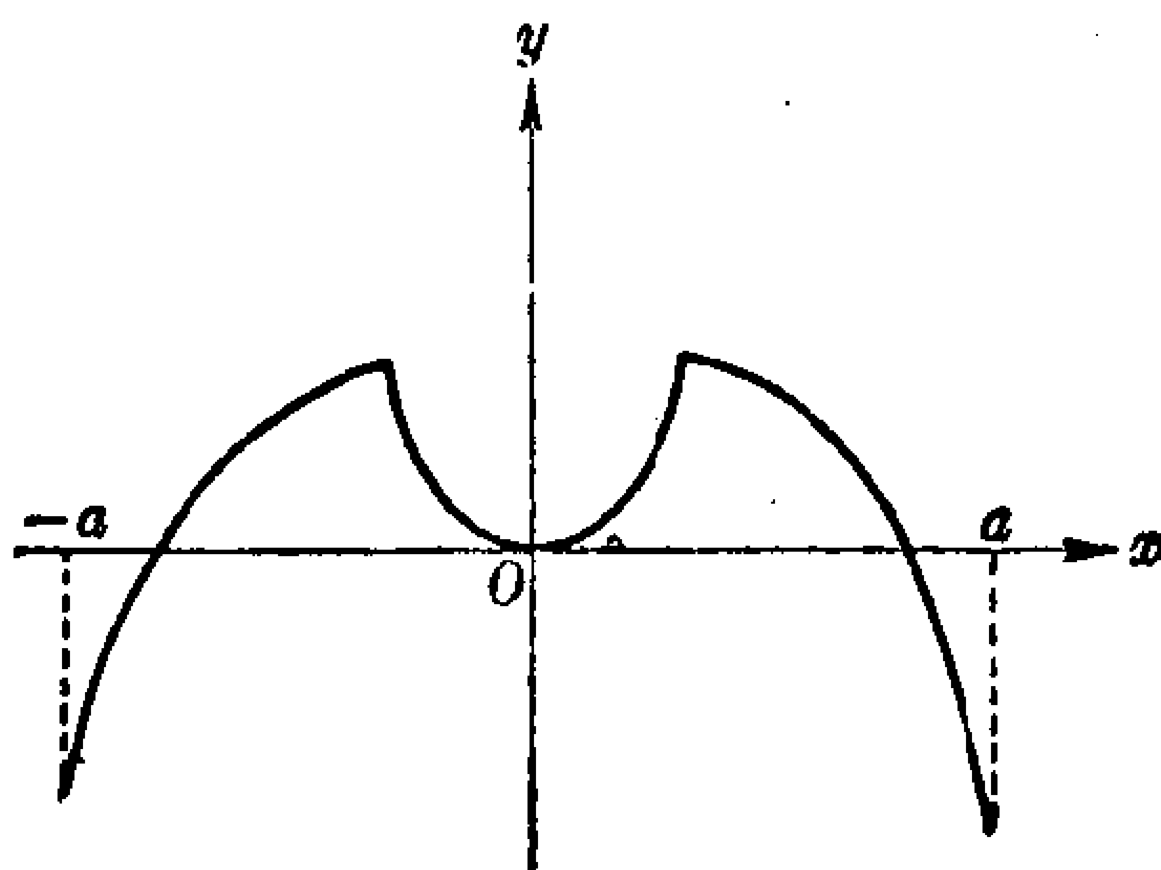


图 3-22

当$f(x)$是奇函数时,请读者自己证明$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$. 并作几何解释.

【例 7】 求 $\int_{-2}^{2} x^5 \cos^3 x\,dx$.

解：因为 $x^5\cos^3 x$ 是奇函数，所以

$$\int_{-2}^{2} x^5 \cos^3 x\,dx = 0.$$

【例 8】(周期函数的积分性质) 设 $f(x)$ 是一个周期为 T 的连续函数，证明：对于任意的常数 a，有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx. \tag{1}$$

【证】 为了证明上式，先利用定积分的可加性把左端的积分改写一下：

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx &= \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx,\end{aligned} \tag{2}$$

于是只要证明 $-\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\,dx = 0$，即

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

就可以了.

为此，对积分 $\int_{T}^{a+T} f(x)\,dx$ 作代换 $x = t + T$，则

当 $x = T$ 时，$t = 0$;

当 $x = a + T$ 时，$t = a$.

又

$$f(x) = f(t+T) \xlongequal{\text{由 } f(x) \text{ 的周期性条件}} f(t),$$

$$dx = d(t+T) = dt.$$

从而由换元积分公式得到

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^a f(t)\,dt=\int_0^a f(x)\,dx.$$

将这结果代入(2)式，便得到

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=-\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^T f(x)\,dx$$

$$=\int_0^T f(x)\,dx. \qquad \rbrack$$

从几何上看，以上证明的思路是很清楚的. 假定图 3-23 中的曲线表示周期函数 $y=f(x)$.

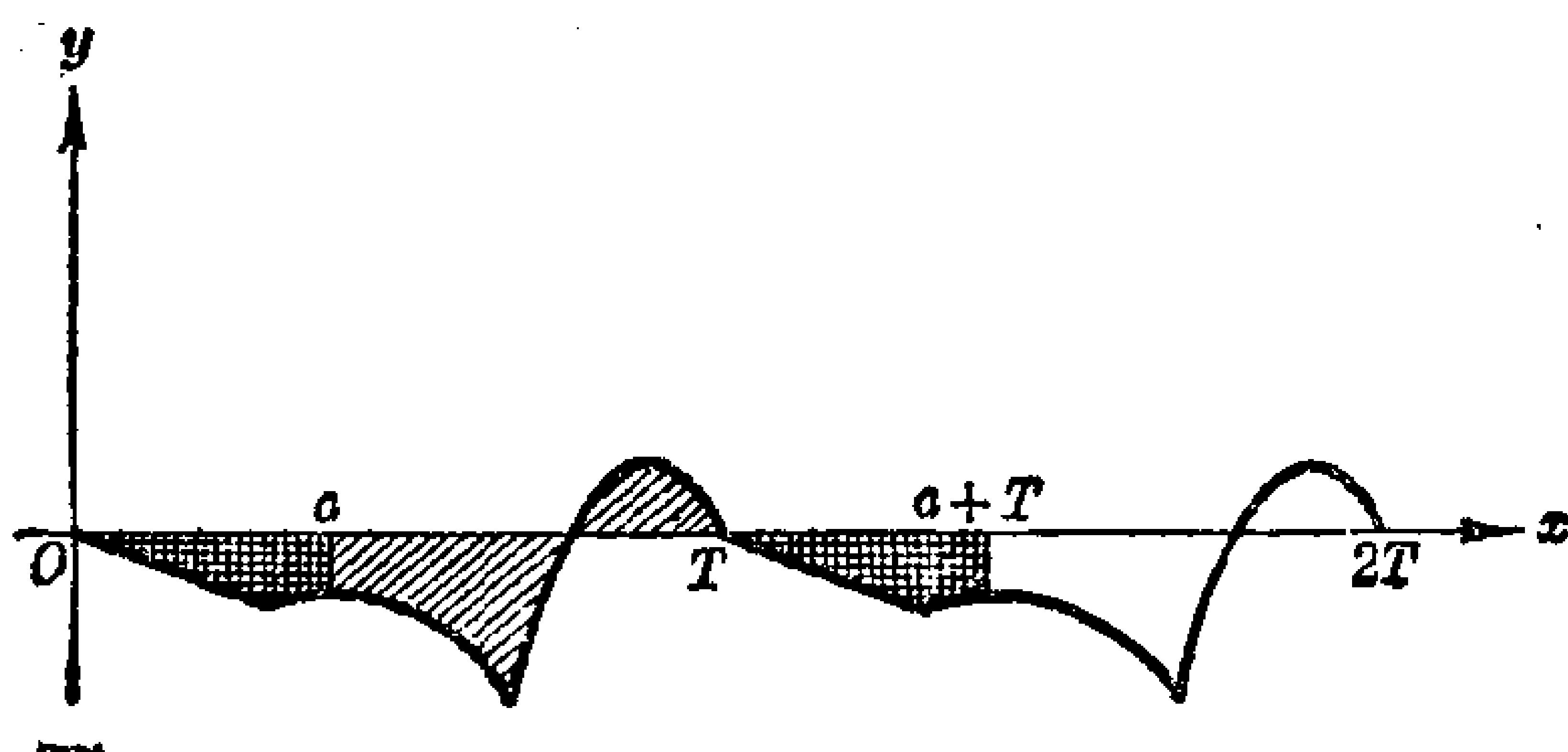


图 3-23

显然，积分 $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ 与积分 $\int_0^T f(x)\,dx$ 有一部分是相同的：都有 $\int_a^T f(x)\,dx$(图中斜线部分)，因此，只需证明其余的部分相等，即

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

例 8 说明：周期函数在任何一个周期区间(指其长度等于一个周期的区间)上的定积分都相等.

这个结论很重要，用得很多，例如以后我们学习傅氏级数时，就要利用它来求傅氏系数.

【例 9】 设 $f(x)$ 在[0, 1]上连续，证明

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

并用所得结果计算定积分$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

【证】 令 $x=\pi-t$, 则

当 $x=0$ 时，$t=\pi$;

当 $x=\pi$ 时，$t=0$.

又 $$\sin x=\sin(\pi-t)=\sin t,\ f(\sin x)=f(\sin t),$$
$$dx=d(\pi-t)=-dt.$$

由换元积分公式，得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx&=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)\cdot(-1)dt\\&=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)dt\\&=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt\\&=\int_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt\\&=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt,\end{aligned}$$

移项，得到 $$2\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt,$$

因而 $$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin t)dt,$$

即 $$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx.$$

这就是所要证明的.

利用此式可以计算定积分

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

这里，$f(\sin x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\left(=\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}\right)$, 因而由上式得到

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\operatorname{arc\,tg}(\cos x)\Big|_0^\pi$$

$$=-\frac{\pi}{2}[\operatorname{arc\,tg}(-1)-\operatorname{arc\,tg}1]$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi^2}{4}.$$

以上我们举了一些定积分的换元积分法的例子．应当指出的是：在作代换函数 $x=\varphi(t)$ 时，要注意是否满足条件，不然的话，是会出错的．例如

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1}=\int_{-1}^1 \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^1$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}-\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

但是，如果作代换 $x=\frac{1}{t}$，那么，就有

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1}=\int_{-1}^1 \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}\right)+1}$$

$$=-\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t+t^2}=-\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1},$$

移项，便得 $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1}=0.$$

请大家想一想，错在哪里？

4.2 定积分的分部积分法

定理 2 设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数 $u'(x)$, $v'(x)$, 则有分部积分公式

$$\int_a^b u(x)d[v(x)]=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)d[u(x)]. \qquad (3)$$

【证】 由牛顿-莱布尼兹公式，显然有

$$\int_a^b [u(x)\cdot v(x)]'dx=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b.$$

另一方面，由 $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$, 又有

$$\int_a^b [u(x)\cdot v(x)]'dx=\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx+\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$$
$$=\int_a^b v(x)d[u(x)]+\int_a^b u(x)d[v(x)].$$

于是得到

$$\int_a^b v(x)d[u(x)]+\int_a^b u(x)d[v(x)]=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b,$$

移项，便得分部积分公式

$$\int_a^b u(x)d[v(x)]=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\cdot d[u(x)].$$ 】

这个公式与不定积分的分部积分公式很相似，但是，这里每一项都带着积分限.

【例 10】 求 $\int_0^1 x^2\ln(1+x)dx$.

解：先把积分改写成公式(3)左端的形式：

$$\int_0^1 x^2 \ln(1+x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \ln(1+x)d(x^3).$$

这里,$u(x)=\ln(1+x)$, $v(x)=x^3$. 由公式(3), 得到

$$\int_0^1 x^2\ln(1+x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \ln(1+x)d(x^3)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{x^3\cdot\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 d[\ln(1+x)]\right\}$$

$$\xlongequal{\text{微出来}} \frac{1}{3}\left\{\ln 2 - \int_0^1 x^3\cdot\frac{1}{1+x}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\int_0^1\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\left[\frac{5}{6} - \ln 2\right] = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}.$$

【例 11】 求 $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\text{arc tg}\, x|dx$.

解: 因为 $|\text{arc tg}\, x|$ 是偶函数,所以

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\text{arc tg}\, x|dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} |\text{arc tg}\, x|dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} \text{arc tg}\, x\, dx.$$

对于积分 $\int_0^{\sqrt{3}} \text{arc tg}\, x\, dx$, 设 $u(x)=\text{arc tg}\, x$, $v(x)=x$, 利用分部积分公式,得到

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\text{arc tg}\, x|dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} \text{arc tg}\, x\, dx$$

$$= 2\left[x\,\text{arc tg}\, x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x d(\text{arc tg}\, x)\right]$$

$$\xlongequal{\text{微出来}} 2\left[\sqrt{3}\,\text{arc tg}\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\right]$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\ln(1+x^2)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 4.$$

【例 12】 求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \quad (n=0, 1, 2, 3, \cdots)$.

解：当 $n=0$ 时，

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2},$$

当 $n=1$ 时， $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1 x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

因此，只需讨论 $n\geqslant 2$ 的情形.

由分部积分公式(3)，得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d(-\cos x)$$

$$=(-\cos x)\cdot\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)d(\sin^{n-1}x)$$

$$\underline{\underline{\text{微出来}}}\ 0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot(1-\sin^2 x)dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

即
$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

移项，得
$$I_n+(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2},$$
$$nI_n=(n-1)I_{n-2},$$

于是得到递推公式
$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n\geqslant 2).\tag{4}$$

根据递推公式(4)，可导出具体结果：
$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}$$
$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}I_{n-6}=\cdots,$$

继续推下去，有两种可能：

① 若 n 为偶数，则最后推到 $I_0=\frac{\pi}{2}$，

② 若 n 为奇数，则最后推到 $I_1=1$.

于是得到结果：
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 是偶数};\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

例如： $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\,dx=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{16}{35}$.

【例 13】 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^8 2x\,dx$.

解：令 $2x=t$，则

当 $x=0$ 时，$t=0$;

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$.

又 $$\cos 2x=\cos t,\quad dx=d\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}dt.$$

于是,由换元积分公式与上面的递推公式,得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^8 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 t\,dt \quad (\text{由第一段例 5})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 t\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{105}{1536}\pi.$$

【例 14】 证明

$$\int_0^1(1-x)^n x^m dx=\frac{n!m!}{(n+m+1)!} \quad (n,\ m\ \text{为正整数}).$$

【证】 只需用 n 次分部积分公式:

$$\int_0^1(1-x)^n x^m dx=\frac{1}{m+1}\int_0^1(1-x)^n d(x^{m+1})$$

$$\xlongequal{1\text{次}}\frac{1}{m+1}\left[(1-x)^n\cdot x^{m+1}\Big|_0^1-\int_0^1 x^{m+1}d((1-x)^n)\right]$$

$$\xlongequal{\text{微出来}}\frac{1}{m+1}\left[0-n\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\cdot(-1)dx\right]$$

$$=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\cdot(1-x)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{1}{m+2}\int_0^1(1-x)^{n-1}d(x^{m+2})$$

$$\xlongequal{2\text{次}}\frac{n}{(m+1)(m+2)}\left[(1-x)^{n-1}\cdot x^{m+2}\Big|_0^1\right.$$

$$\left.-\int_0^1 x^{m+2}d((1-x)^{n-1})\right]$$

$$=\frac{n}{(m+1)(m+2)}$$

$$\times\left[0-(n-1)\int_0^1 x^{m+2}(1-x)^{n-2}\cdot(-1)dx\right]$$

$$=\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}\int_0^1 x^{m+2}(1-x)^{n-2}dx.$$

完全类似地，用三次分部积分公式，有

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m dx$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}\int_0^1 (1-x)^{n-3}x^{m+3}dx.$$

用数学归纳法，可知用 n 次分部积分法后，便得到

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m dx$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n)}\int_0^1 x^{m+n}dx$$

$$=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}\cdot\frac{1}{m+n+1}\ x^{m+n+1}\Big|_0^1$$

$$=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)(m+n+1)}$$

$$=\frac{m!n!}{1\cdot 2\cdots m\cdot(m+1)(m+2)\cdots(m+n)(m+n+1)}$$

$$=\frac{n!m!}{(m+n+1)!}.$$

这就是所要证明的. ▌

最后，作为分部积分法的应用，我们从另一个角度来导出泰勒(Taylor)公式，并给出积分型余项.

在本丛书《一元函数微分学》一书中，大家学习过如下定理：

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $|x-x_0|<h$ 内有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则当 x 在此邻域内(即 $|x-x_0|<h$)时，有泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+R_n(x). \tag{5}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}) \tag{6}$$

称为拉格朗日(Lagrange)型余项，它是比$(x-x_0)^n$更高阶的无穷小量. 公式(5)称为具有拉格朗日型余项的泰勒公式.

现在,我们给出余项的另一形式.

定理3 设$f(x)$在x_0的某个邻域$|x-x_0|<h$内有直到$(n+1)$阶的连续导数,则当$|x-x_0|<h$时,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x). \tag{7}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \tag{8}$$

称为积分型余项，公式(7)称为具有积分型余项的泰勒公式.

【证】 如上所述,在所给条件下,总有下式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+R_n(x),$$

现在只需证明$R_n(x)$具有积分形式(8)，即

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

亦即

$$f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n\right]=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

或

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$
$$=f(x)-\Big[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$
$$+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n\Big]. \quad (9)$$

下面用分部积分法来证明.

为了采用大家所熟悉的符号，我们先把公式(9)改写一下：把 x_0 换成 a, x 换成 b:

$$\frac{1}{n!}\int_{a}^{b}(b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$
$$=f(b)-\Big[f(a)+f'(a)\cdot(b-a)$$
$$+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(b-a)^n\Big]. \quad (10)$$

我们利用数学归纳法.

首先证明：当 $n=1$ 时，公式(10)成立，即

$$\int_a^b(b-t)f''(t)dt=f(b)-[f(a)+f'(a)\cdot(b-a)].$$

事实上，利用分部积分法，有

$$\int_a^b(b-t)f''(t)dt=\int_a^b(b-t)d[f'(t)]$$
$$=(b-t)\cdot f'(t)\Big|_a^b-\int_a^b f'(t)d[(b-t)]$$
$$=-(b-a)f'(a)+\int_a^b f'(t)dt$$
$$\xlongequal{\text{由微积分基本公式}}-(b-a)f'(a)+f(t)\Big|_a^b$$
$$=-(b-a)f'(a)+f(b)-f(a)$$
$$=f(b)-[f(a)+f'(a)\cdot(b-a)].$$

其次，设 $n=k$ 时，公式(10)成立，即

$$\frac{1}{k!}\int_a^b (b-t)^k f^{(k+1)}(t)dt$$
$$=f(b)-\Big[f(a)+f'(a)\cdot(b-a)$$
$$+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\Big], \qquad (11)$$

我们要证明 $n=k+1$ 时，公式(10)也成立．为此，利用分部积分法，有

$$\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)dt$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-t)^{k+1} d[f^{(k+1)}(t)]$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}\Big[(b-t)^{k+1}f^{(k+1)}(t)\Big|_a^b$$
$$-\int_a^b f^{(k+1)}(t)d((b-t)^{k+1})\Big]$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}\Big[-(b-a)^{k+1}f^{(k+1)}(a)$$
$$+(k+1)\int_a^b (b-t)^k f^{(k+1)}(t)dt\Big]$$
$$=\frac{-1}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}f^{(k+1)}(a)$$
$$+\frac{1}{k!}\int_a^b (b-t)^k f^{(k+1)}(t)dt,$$

对后面一项，可将归纳法假定——(11)式代入，于是有

$$\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)dt$$
$$=-\frac{1}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}f^{(k+1)}(a)+f(b)$$
$$-\Big[f(a)+f'(a)\cdot(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(b-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^{k}\Big]$$

$$=f(b)-\Big[f(a)+f'(a)\cdot(b-a)$$

$$+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(b-a)^{2}+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(b-a)^{k}$$

$$+\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}\cdot(b-a)^{k+1}\Big],$$

这正是(10)式当 $n=k+1$ 的情形．也就是说，当 $n=k+1$ 时，公式(10)式成立．

于是由归纳法，知(10)式对于一切 $n=1,2,3,\cdots$ 都成立．

然后，我们把字母再换回来：令 $a=x_0$，$b=x$，则公式(10)就化成公式(9)．

最后，把公式(9)中的 $f(x)$ 写在等式左端，其余的各项写在等式右端，便得到

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^{n}$$

$$+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

于是定理得到证明． ▌

利用积分第一中值定理，还可以把积分型余项(8)化为拉格朗日型余项(6)．事实上，在积分型余项(8)中，被积函数是 $(x-t)^{n}f^{(n+1)}(t)$，由于 $(x-t)^{n}$ 在 $x_0\leqslant t\leqslant x$（或 $x\leqslant t\leqslant x_0$）上不变号，而 $f^{(n+1)}(t)$ 连续，因而由积分第一中值定理，有

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n}\,dt$$

$$= \frac{-1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} (x-t)^n d(x-t)$$

$$= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{1}{n+1} (x-t)^{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间. 这就是拉格朗日型余项(6). 这一段推导说明: 从积分型余项可以推出拉格朗日型余项, 或者说, 从具有积分型余项的泰勒公式可以推出具有拉格朗日型余项的泰勒公式. 不过, 现在要求 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $|x-x_0|<h$ 内连续, 以前只要求 $f^{(n+1)}(x)$ 存在.

习　题　五

1. 求下列定积分:

(1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} dx$;　　(2) $\int_0^3 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}$;

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$;　　(4) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$;

(5) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$;　　(6) $\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \quad (a>0)$;

(7) $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4} dx \quad (a>0)$;　　(8) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(9) $\int_0^{a\sqrt{2}} \frac{r\,dr}{\sqrt{3a^2-r^2}}$;　　(10) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx$;

(11) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$;　　(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,dt$;

(13) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$;　　(14) $\int_{-1}^1 x\sqrt{(1-x^2)^5}\,dx$;

(15) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta$;　　(16) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x\,dx$;

(17) $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} \, dx$;

(18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos^4 x \, dx$;

(19) $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx$;

(20) $\int_1^{e} x \ln x \, dx$;

(21) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$;

(22) $\int_0^1 x \operatorname{arc\,tg} x \, dx$;

(23) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$;

(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$;

(25) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx$;

(26) $\int_0^{2\pi} x \cos^2 x \, dx$;

(27) $\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$;

(28) $\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} \, dx$ （假定此式有意义）.

2．利用奇函数的积分性质计算:

(1) $\int_{-2}^2 x^3 \cos^3 x \, dx$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x \, dx$;

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$;

(4) $\int_{-5}^5 \frac{x^2 \sin^3 x}{(x^4+3x^2-5)^3} \, dx$.

3．下面的作法对吗？怎样改正？

(1) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \xlongequal{令\,x=t^2} \int_0^4 \frac{2t\,dt}{1+t}$;

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \xlongequal{令\,x=\sin t} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \, d(\sin t) = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$.

4．检验下列代换是否正确:

(1) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$, 令 $x = \frac{1}{t}$;

(2) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, 令 $\operatorname{tg} x = t$, 或 $x = \operatorname{arc\,tg} t$;

(3) $\int_{-1}^1 dx$, 令 $t = x^{\frac{2}{3}}$.

5．在积分 $\int_0^3 x^3\sqrt{1-x^2} \, dx$ 中，令 $x = \sin t$ 是否合适？应怎样求这个积分？

6. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是连续的，证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

7. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，证明:

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx.$$

8. 证明:

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx \quad (a>0).$$

9. 设 $\varphi''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $\varphi'(b)=a$, $\varphi'(a)=b$, 试求

$$\int_a^b \varphi'(x)\cdot\varphi''(x)dx.$$

10. 证明:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx.$$

11. 证明: 设 $f(x)$ 在 $[-b, b]$ 上连续，则

$$\int_{-b}^b f(x)dx = \int_{-b}^b f(-x)dx.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续，证明:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx.$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续，证明:

(1) $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(x-a)]dx$;

(2) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^{a/2} [f(x)+f(a-x)]dx.$

14. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，证明:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx.$$

15. 证明:

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx = \begin{cases} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, & n\text{为偶数}; \\ 0, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

16. 证明: 当 n 为奇数时，函数

$$\Phi(x)=\int_0^x \sin^n t\,dt$$

是以 2π 为周期的周期函数.

17. 设 $f(t)$ 是连续函数, 证明:

(1) 当 $f(t)$ 是偶函数, 则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数;

(2) 当 $f(t)$ 是奇函数, 则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数.

这一事实又可叙述为:

连续的偶函数的所有原函数中, 有一个是奇函数; 连续的奇函数的所有原函数都是偶函数(这是因为偶函数加任意常数仍是偶函数). 这一关于不定积分的结论, 现在用定积分的办法给出了证明.

18. 设 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\int_a^b xf''(x)dx=[bf'(b)-f(b)]-[af'(a)-f(a)].$$

19. 利用分部积分法, 证明: 若 $f(x)$ 连续, 则

$$\int_0^x\left[\int_0^t f(x)dx\right]dt=\int_0^x f(t)\cdot(x-t)dt.$$

第五节　定积分的近似计算

在第三节, 我们介绍了怎样利用微积分基本公式通过不定积分去计算定积分, 第四节介绍了定积分本身的两个计算法则(换元积分法与分部积分法), 这些方法能有效地算出许多定积分. 但是应当指出, 以上方法在不少情况下(特别是在实际问题中)却是无能为力的. 例如以下几种情况:

① 被积函数是用图形或表格给出的, 没有公式;

② 被积函数虽然用公式给出, 但是原函数很复杂, 要计算它在积分上、下限的值很困难;

③ 原函数不能用初等函数表示;

④ 其它技巧一时也用不上.

在这几种情况下，就需要我们从定积分的定义出发，去近似地计算定积分的值. 本节所要介绍的是利用定积分的几何意义得到的几种近似积分公式.

5.1 矩形公式

为了讨论问题明确起见，假定在$[a, b]$上，$y=f(x)\geqslant 0$. 于是定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示曲边梯形的面积（图 3-24）. 如果能近似算出这块面积，那么也就近似算出了定积分.

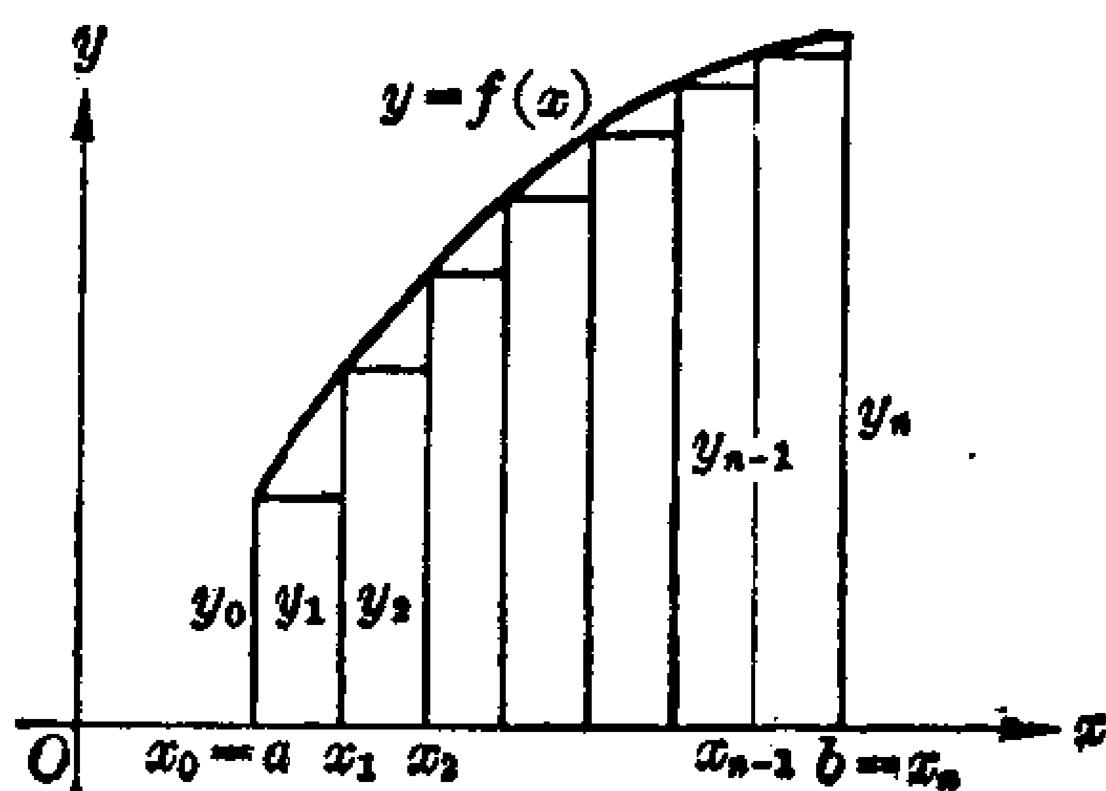


图 3-24

以前计算这块面积，是分四步解决的：分割——近似代替——求和——取极限. 但是，在实际做法中，不可能是无限分割，总是分成有限的 n 份. n 小些，精确程度差些；n 大些，精确度就高些. 也就是说，在我们去近似地计算面积时，只需前面三个步骤，得到的是阶梯形面积.

为了使计算便于进行，我们将$[a, b]$等分为 n 份，分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

原曲边梯形相应地被分成 n 个小曲边梯形，它们的底边都相等，即每个小区间的长度相等，都是 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$. 取中间点 ξ_i 为小区间的左端点 x_{i-1} 或右端点 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，也就是用小矩形面积去近似代替小曲边梯形面积. 这样，便得到

$$\int_a^b f(x)dx\approx f(x_0)\cdot\Delta x+f(x_1)\cdot\Delta x$$

$$
\begin{aligned}
&+f(x_2)\cdot\Delta x+\cdots+f(x_{n-1})\cdot\Delta x\\
&=\Delta x\cdot[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})]\\
&=\frac{b-a}{n}[y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}].
\end{aligned}\tag{1}
$$

其中 $\qquad y_i=f(x_i)\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$

这是取 $\xi_i=x_{i-1}$ 时所得到的近似积分公式.

若取 $\xi_i=x_i$, 则得到

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx&\approx f(x_1)\cdot\Delta x+f(x_2)\cdot\Delta x+\cdots\\
&\quad+f(x_{n-1})\cdot\Delta x+f(x_n)\cdot\Delta x\\
&=\frac{b-a}{n}[y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+y_n].
\end{aligned}\tag{2}
$$

其中 $\qquad y_i=f(x_i)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$

公式(1), (2)都称为矩形公式.

5.2 梯形公式

小曲边梯形面积也可用小直边梯形面积来代替(图3-25). 这样作所得到的近似积分公式称为梯形公式. 具体作法是:

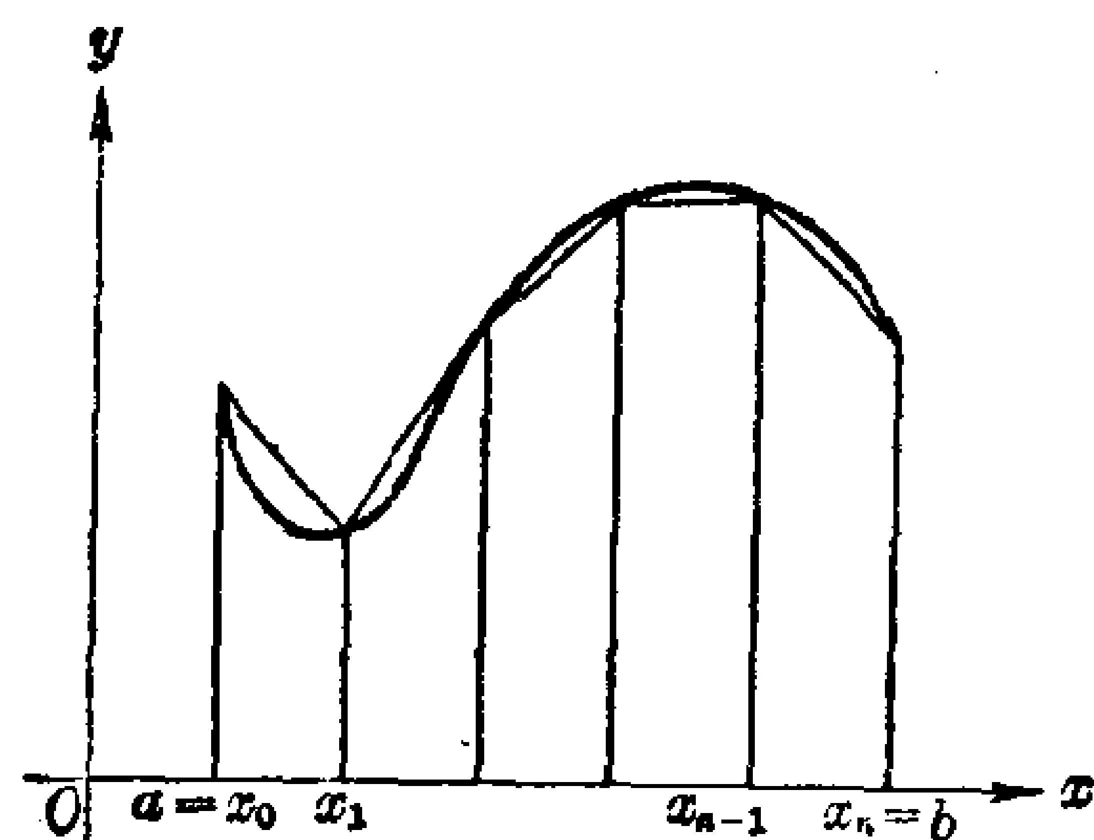


图 3-25

把区间 $[a,\ b]$ 分为 n 等份, 分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

设相应的函数值为

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1},\ y_n.$$

每个小直边梯形的面积可用公式

$$\frac{\text{上底}+\text{下底}}{2}\times\text{高}$$

求得:
$$\frac{y_0+y_1}{2}\cdot\Delta x,\quad \frac{y_1+y_2}{2}\cdot\Delta x,\ \cdots,$$
$$\frac{y_{n-2}+y_{n-1}}{2}\cdot\Delta x,\quad \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot\Delta x.$$

于是得到

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{y_0+y_1}{2}\cdot\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\cdot\Delta x+\cdots$$
$$+\frac{y_{n-2}+y_{n-1}}{2}\cdot\Delta x+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot\Delta x$$
$$=\frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right].\qquad(3)$$

公式(3)称为梯形公式.

比较公式(1),(2),(3),容易知道:用公式(3)所得到的近似值,正是用公式(1)和(2)所得近似值的算术平均值.因此,一般说来,用公式(3)比单独用公式(1)或(2)精确程度要高一些.也就是说,用梯形公式所产生的误差,比用矩形公式所产生的误差要小.

【例1】 设有一河,宽为200米.从一岸到正对岸每隔20米测量一次水深.测得数据如下:

x 米(宽)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
y 米(深)	2	5	9	11	13	17	21	15	11	6	2

求此河的横截面面积 A 的近似值.

解:设河流横截面的底边方程为 $y=f(x)$,则所求面积可用定积分表示:

$$A=\int_0^{200} f(x)dx.$$

现在，曲边方程 $y=f(x)$ 并不知道，但是测得了它的一组数据，因此可以近似地计算定积分.

用梯形公式(3). 这里

$$n=10,\quad \frac{b-a}{n}=20,$$

因而

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{200} f(x)dx\\&\approx 20\left[\frac{2+2}{2}+5+9+11+13+17+21+15+11+6\right]\\&=2200(\text{米}^2).\end{aligned}$$

5.3 抛物线公式

以上两种近似公式，都是在局部范围内"以直代曲"所得到的. 现在要介绍的近似公式却不是这样，而是"以曲代曲"，在局部范围内，用一条抛物线段去近似代替相应的曲线段(抛物线下的面积可用定积分求出，比小曲边梯形的面积好算些). 这样得到的近似积分公式称为抛物线公式或辛普森(Simpson)公式. 下面我们来推导这个公式.

如图 3-26，将区间 $[a, b]$ 分为 $2n$ 等份，分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}=b,$$

相应的函数值为

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{2n-1},\ y_{2n}.$$

设曲线上的相应分点为

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_{2n-1},\ M_{2n}.$$

我们知道，通过三个点可以唯一确定一条抛物线(其对称

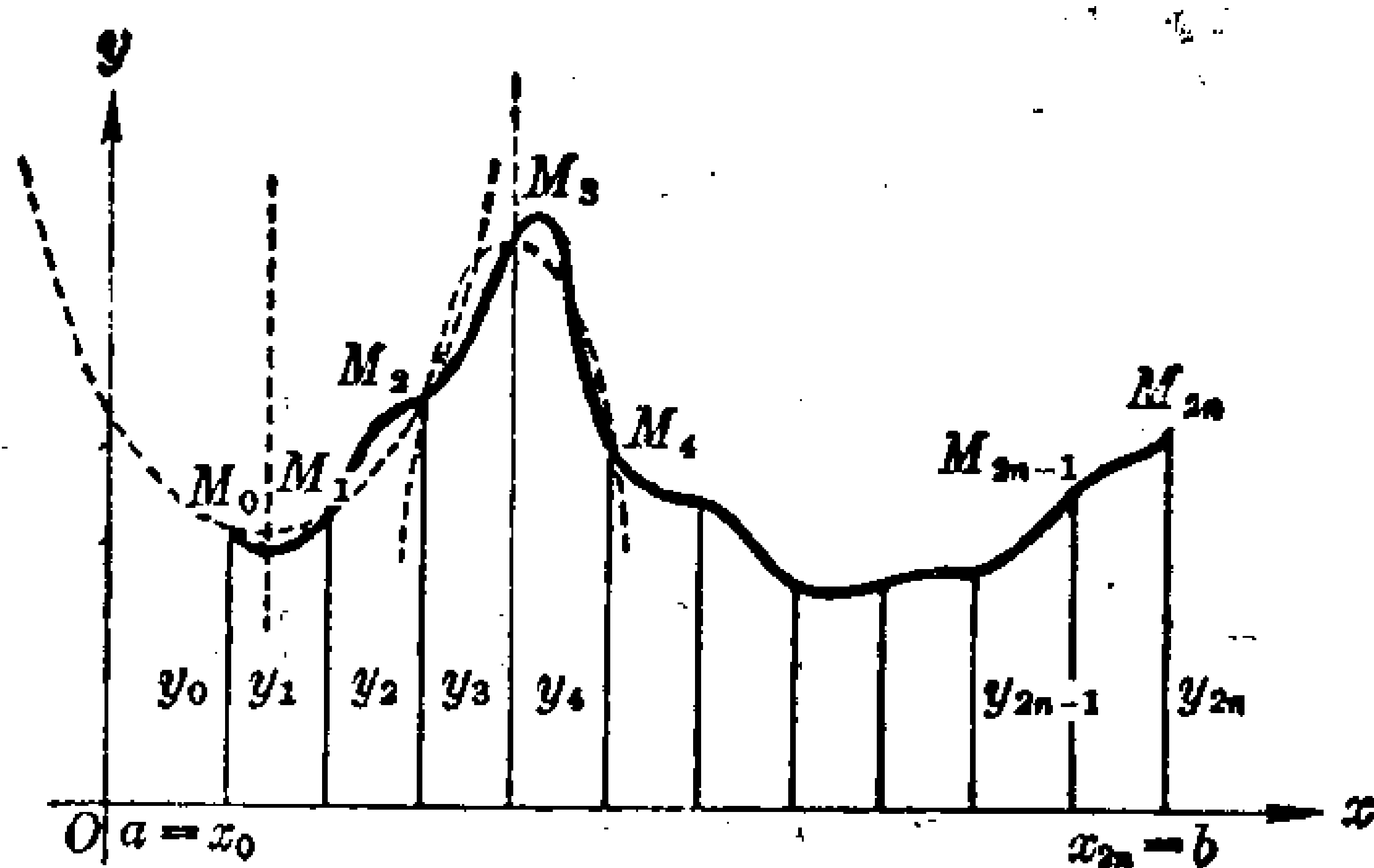


图 3-26

轴平行于 y 轴)或直线，因此，过点 $M_0(x_0, y_0)$，$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$ 可以唯一确定一条抛物线(或直线)

$$y=Ax^2+Bx+C.$$

其中系数 A, B, C 由下列方程组确定：

$$\begin{cases} y_0=Ax_0^2+Bx_0+C, \\ y_1=Ax_1^2+Bx_1+C, \\ y_2=Ax_2^2+Bx_2+C. \end{cases}$$

现在，我们用定积分来计算这条抛物线下的面积：

$$\int_{x_0}^{x_2}(Ax^2+Bx+C)dx=\left[\frac{A}{3}x^3+\frac{B}{2}x^2+Cx\right]_{x_0}^{x_2}$$

$$=\frac{A}{3}(x_2^3-x_0^3)+\frac{B}{2}(x_2^2-x_0^2)+C(x_2-x_0)$$

$$=\frac{x_2-x_0}{6}[2A(x_2^2+x_2x_0+x_0^2)+3B(x_2+x_0)+6C]$$

$$=\frac{x_2-x_0}{6}[(Ax_2^2+Bx_2+C)+A(x_2^2+2x_2x_0+x_0^2)$$
$$+2B(x_2+x_0)+4C+(Ax_0^2+Bx_0+C)]$$

$$=\frac{x_2-x_0}{6}[y_2+A(x_2+x_0)^2+2B(x_2+x_0)+4C+y_0].$$

由于是等分区间，x_1 是 x_0 和 x_2 的中点，所以 $x_1=\frac{x_2+x_0}{2}$，或

$x_2+x_0=2x_1$. 于是有

$$\int_{x_0}^{x_2}(Ax^2+Bx+C)dx$$

$$=\frac{x_2-x_0}{6}[y_2+4Ax_1^2+4Bx_1+4C+y_0]$$

$$=\frac{x_2-x_0}{6}[y_2+4(Ax_1^2+Bx_1+C)+y_0]$$

$$=\frac{x_2-x_0}{6}[y_2+4y_1+y_0].$$

同样，通过三点 $M_2(x_2, y_2)$，$M_3(x_3, y_3)$，$M_4(x_4, y_4)$ 的抛物线下的面积为

$$\frac{x_4-x_2}{6}[y_4+4y_3+y_2].$$

类似地，一直作下去，最后得到通过三点 M_{n-2}，M_{n-1}，M_n 的抛物线下的面积

$$\frac{x_{2n}-x_{2n-2}}{6}[y_{2n}+4y_{2n-1}+y_{2n-2}].$$

这样的抛物线段一共有 n 条. 把它们下面的面积加起来，就得到原曲边梯形面积(也就是所求定积分)的一个近似值. 注意到

$$x_2-x_0=x_4-x_2=\cdots=x_{2n}-x_{2n-2}=2\cdot\frac{b-a}{2n}=\frac{b-a}{n},$$

于是有

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6n}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots$$
$$+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})]$$
$$=\frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})$$
$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})]. \qquad (4)$$

公式(4)称为抛物线公式，或辛普森公式.

注意：公式(4)中的$6n$是总份数$2n$的三倍，不是六倍.

【例 2】 用抛物线公式解例 1.

解：现在份数$2n=10$, $n=5$, $\frac{b-a}{6n}=\frac{200}{30}$，由公式(4)，得到

$$A=\int_0^{200}f(x)dx\approx\frac{200}{30}[(2+2)+2(9+13+21+11)$$
$$+4(5+11+17+15+6)]\approx 2187(\text{米}^2).$$

【例 3】 对$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$作近似计算，求$\pi$的近似值.

解：$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$. 下面分别用三种近似公式求定积分$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$.

将区间[0, 1]分成4等份，并将分点和相应的函数值列表如下：

脚 标 i	0	1	2	3	4
x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	1.0000	0.9412	0.8000	0.6400	0.5000

利用矩形公式(1)，有

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\approx\frac{1}{4}[y_0+y_1+y_2+y_3]$$
$$=\frac{1}{4}\times 3.3812=0.8453.$$

利用梯形公式(3)，有

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{4}\left[\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right]$$

$$=\frac{1}{4}\times 3.1312=0.7828.$$

利用抛物线公式(4)，有

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}[1+0.5000+4(0.9412+0.6400)$$

$$+2\times 0.8000]=0.7854.$$

从而得到 $\pi=4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ 的三个近似值：

$$4\times 0.8453=3.3812,$$

$$4\times 0.7828=3.1312,$$

$$4\times 0.7854=3.1416.$$

我们看到，抛物线公式的误差最小．因此，在许多情形下，都用抛物线公式．

在实际问题中，定积分的准确值常常是不知道的，那么，怎样估计误差呢？

如果被积函数 $f(x)$ 的表达式是知道的，并且 $f'(x)$，$f''(x)$，$f^{(4)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则有误差估计公式如下(证明从略)．

① 矩形公式的误差为

$$R_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}[y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}],$$

它有估计式 $$|R_n|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2n}C_1,$$

其中 C_1 是 $f'(x)$ 的界：

$$|f'(x)|\leqslant C_1\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

显然，R_n 是与 $\frac{1}{n}$ 同阶的无穷小量．

② 梯形公式的误差为

$$R_n=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right],$$

它有估计式
$$|R_n|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}C_2,$$

其中 C_2 是 $f''(x)$ 的界:

$$|f''(x)|\leqslant C_2 \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

显然, R_n 是与 $\frac{1}{n^2}$ 同阶的无穷小量.

③ 抛物线公式的误差为

$$R_{2n}=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})$$
$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})],$$

它有估计式
$$|R_{2n}|\leqslant\frac{(b-a)^5}{180\cdot(2n)^4}C_3,$$

其中 C_3 是 $f^{(4)}(x)$ 的界:

$$|f^{(4)}(x)|\leqslant C_3 \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

显然, R_{2n} 是与 $\frac{1}{n^4}$ 同阶的无穷小量.

这就从理论上说明了为什么梯形公式的精确度比矩形公式的高,而抛物线公式的精确度又比梯形公式的高.

【例 4】 用抛物线公式计算定积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, 要求近似值精确到 0.0001.

解: 被积函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 的原函数不能表为初等函数, 因而定积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 只能近似计算.

为了保证精确度,应首先根据误差估计式

$$|R_{2n}|\leqslant 0.0001,$$

来确定分割的份数．为此，需要算出 $f(x)=e^{-x^2}$ 的四阶导数 $f^{(4)}(x)$．易知

$$(e^{-x^2})^{(4)}=(16x^4-48x^2+12)e^{-x^2}.$$

因此 $$|f^{(4)}(x)|=|16x^4-48x^2+12|\cdot|e^{-x^2}|,$$

当 x 在 $[0, 1]$ 上时，$|e^{-x^2}|\leqslant 1$，只须估计 $|16x^4-48x^2+12|$．

令 $$y=16x^4-48x^2+12 \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

则 $$y'=4(4x^4-12x^2+3)'=4(16x^3-24x)$$
$$=32(2x^2-3)\cdot x\leqslant 0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

因此 $y=16x^4-48x^2+12$ 在 $[0, 1]$ 上是单调下降的，从而只须算出 y 在区间端点 $x=0$ 及 $x=1$ 处的值 $y(0)$ 及 $y(1)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，便有

$$|y(x)|\leqslant\max\{|y(0)|,\ |y(1)|\}=\max\{12,\ 20\}=20,$$

即 $$|16x^4-48x^2+12|\leqslant 20 \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

于是

$$|f^{(4)}(x)|=|16x^4-48x^2+12|\cdot|e^{-x^2}|\leqslant 20 \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

即 $$C_3=20.$$

代入误差估计式：

$$|R_{2n}|\leqslant\frac{(b-a)^5}{180\cdot(2n)^4}\cdot C_3=\frac{1}{180\cdot(2n)^4}\cdot 20=\frac{1}{9\cdot(2n)^4}.$$

要 $|R_{2n}|\leqslant 0.0001$，只须

$$\frac{1}{9\cdot(2n)^4}\leqslant 0.0001,$$

或 $$(2n)^4\geqslant\frac{1}{9\times 0.0001}=\frac{10000}{9}.$$

即 $$2n\geqslant\sqrt[4]{\frac{10000}{9}}=\sqrt[4]{\frac{10000\times 9}{9\times 9}}=\frac{10}{3}\sqrt[4]{9}.$$

因此取份数 $2n=10$ 即可．

份数确定以后，把分点和相应的函数值列成表：

脚标 i	0	1	2	3	4	5
x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1.00000	0.99005	0.96079	0.91393	0.85214	0.77880

脚标 i	6	7	8	9	10
x	0.6	0.7	0.8	0.9	1 0
y	0.69768	0.61263	0.52729	0.44486	0.36788

利用抛物线公式(4)，得到

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{b-a}{3(2n)}[(y_0+y_{10})+2(y_2+y_4+y_6+y_8)$$
$$+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]$$
$$=\frac{1}{30}[1.36788+2\times3.03790+4\times3.74027]$$
$$=\frac{1}{30}\times22.40476=0.74683.$$

积分 $\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的值已编制成表．查表得到

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0.746823.$$

将上面得到的近似值与这个值相比较，知误差不超过 0.00001．

习 题 六

1．函数 $f(x)$ 的值由下表列出：

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

试用抛物线公式计算积分 $\int_{1.05}^{1.35} f(x)dx$ 的近似值.

2. 用矩形公式($n=12$)近似计算积分

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

(被积函数值取小数四位),并将结果与积分的精确值作比较.

3. 用梯形公式($n=6$)近似计算椭圆积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx$$

(被积函数值取小数四位).

4. 用抛物线公式($2n=10$)近似计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$$

(被积函数值取小数四位).

5. 用梯形公式近似计算椭圆积分

$$\int_0^2 \sqrt{4+x^3}\,dx,$$

使误差不超过 0.02(被积函数值取小数三位).

第三章小结

关于定积分的概念与计算,我们已经讲完了. 这一章的内容比较多,应该怎样去掌握呢? 为此,我们把这些内容分为两方面,简单地归纳如下:

1. 概念和理论方面

应注意几个问题:

① 定积分概念是怎样从实际问题中抽象出来的?

用定积分思想去解决实际问题时,一般分为几步?

② 定积分有哪些基本性质? 它们的用途主要有哪些?

③ 什么是微积分基本定理？定积分与不定积分的联系是怎样的？

④ 怎样证明微积分基本公式(即牛顿-莱布尼兹公式)？这个公式的作用是什么？

2. 计算方面

有下面几种方法：

① 从定义出发，通过求积分和的极限去计算定积分：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

这里，常常是把区间$[a, b]$等分为n份，因而

$$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}\quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

并取中间点ξ_i为小区间$[x_{i-1}, x_i]$的左端点x_{i-1}，或右端点x_i.

应当指出，根据定义求定积分是相当困难的. 一般说来，对于不同的被积函数，往往需要寻求个别的、专门的方法.

【例】 根据定义求定积分$\int_a^b x^\mu dx(0<a<b, \mu$ 是常数).

提示：选择诸分点x_i，使它们构成一等比数列.

解：这个题如果用微积分基本公式来作，是非常容易的：

当$\mu\neq -1$时，

$$\int_a^b x^\mu dx=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}\Big|_a^b=\frac{1}{\mu+1}(b^{\mu+1}-a^{\mu+1}).$$

当$\mu=-1$时，

$$\int_a^b x^{-1}dx=\int_a^b\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_a^b=\ln b-\ln a.$$

现在我们根据定义来计算这个定积分.

由提示：诸分点x_i构成一等比数列

$$a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, aq^n=b.$$

即　$x_0=a,\ x_1=aq,\ x_2=aq^2,\ \cdots,\ x_{n-1}=aq^{n-1},\ x_n=aq^n=b.$

从 $aq^n=b$，知公比

$$q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

当 $n\to+\infty$ 时，有

$$q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\to 1.$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta x_i&=x_i-x_{i-1}=aq^i-aq^{i-1}=aq^{i-1}\cdot(q-1)\\&\leqslant aq^n\cdot(q-1)=b(q-1)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\end{aligned}$$

即
$$\Delta x_i\leqslant b(q-1)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

因而，当 $n\to+\infty$ 时，由 $q\to1$ 知

$$\Delta x_i\to 0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

取中间点 ξ_i 为左端点 x_{i-1}，即

$$\xi_i=x_{i-1}=aq^{i-1}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

则积分和为

$$\begin{aligned}\sigma_n&=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1})^{\mu}\cdot\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(aq^{i-1})^{\mu}\cdot aq^{i-1}\cdot(q-1)\\&=a^{\mu+1}\cdot(q-1)\sum_{i=1}^{n}(q^{i-1})^{\mu+1}\\&=a^{\mu+1}\cdot(q-1)\sum_{i=1}^{n}(q^{\mu+1})^{i-1}.\end{aligned}$$

定积分 $\int_a^b x^{\mu}dx$ 是积分和 σ_n 当 $n\to+\infty$ 时的极限：

$$\int_a^b x^{\mu}dx=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim_{n\to+\infty}a^{\mu+1}\cdot(q-1)\sum_{i=1}^{n}(q^{\mu+1})^{i-1}.$$

为了求出这个极限，应当分两种情况进行讨论：

(i) 当 $\mu\neq-1$ 时，则根据等比数列求和公式

$$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1}\quad (r\neq 1),$$

可以写出

$$\sum_{i=1}^{n}(q^{\mu+1})^{i-1}=1+(q^{\mu+1})+(q^{\mu+1})^2+\cdots+(q^{\mu+1})^{n-1}$$

$$=\frac{(q^{\mu+1})^n-1}{(q^{\mu+1})-1}=\frac{(q^n)^{\mu+1}-1}{q^{\mu+1}-1}$$

$$\xlongequal{q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1}-1}{q^{\mu+1}-1}$$

$$=\frac{1}{a^{\mu+1}}\cdot\frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{q^{\mu+1}-1},$$

代入 σ_n 的表达式，得到

$$\sigma_n=a^{\mu+1}\cdot(q-1)\sum_{i=1}^{n}(q^{\mu+1})^{i-1}$$

$$=a^{\mu+1}\cdot(q-1)\cdot\frac{1}{a^{\mu+1}}\cdot\frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{q^{\mu+1}-1}$$

$$=(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\cdot\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1}.$$

于是有(当 $\mu\neq-1$)

$$\int_a^b x^\mu dx=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim_{n\to+\infty}(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\cdot\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1}$$

$$=(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\lim_{n\to+\infty}\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1}$$

$$=(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\lim_{q\to1}\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1}$$

$$\xlongequal{\text{由洛比达法则}}(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\cdot\frac{1}{\mu+1}$$

$$=\frac{1}{\mu+1}(b^{\mu+1}-a^{\mu+1}).$$

(ii) 当 $\mu=-1$，则 $\mu+1=0$，因而

$$a^{\mu+1}=1, \quad q^{\mu+1}=1,$$

于是

$$\sigma_n=a^{\mu+1}\cdot(q-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}(q^{\mu+1})^{i-1}=(q-1)\sum_{i=1}^{n}1=n(q-1)$$

$$=n\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}},$$

从而

$$\int_a^b x^{-1}dx=\int_a^b\frac{1}{x}dx=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim_{\frac{1}{n}\to 0}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a \quad \left(根据\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\right).$$

综合(i)，(ii)，便得到结果

$$\int_a^b x^\mu dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu+1}(b^{\mu+1}-a^{\mu+1}), & \mu\neq-1;\\ \ln b-\ln a, & \mu=-1.\end{cases}$$

这个例子再一次说明：从定义出发去求定积分，需要针对不同的被积函数寻求特殊的计算方法，而这是很困难的．因此，必须找到计算定积分的有效办法．牛顿-莱布尼兹公式满足了这一需要，使定积分的计算获得了简便而统一的方法．

② 利用微积分基本公式(牛顿-莱布尼兹公式)计算定积分：

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b.$$

这是计算定积分的最基本的方法．它把定积分的复杂计算归结为求被积函数的原函数问题，揭示了不定积分与定积

分的内在联系，使不定积分的计算在这里大为有用，并推动了微积分的应用和发展.

③ 利用定积分本身的两个法则(换元积分法与分部积分法)，可以证明一些在理论上很有用的结论，并导出一些重要公式(有些结论和公式不能直接通过不定积分的相应法则来得到).

④ 以上所说的各种方法，在理论研究上是常用的. 但是，在许多应用学科特别是在实际问题中所遇到的定积分，多半都求不出精确值，而需要近似计算. 近似计算定积分的方法很多，本章介绍的是根据定积分的定义和几何意义所给出的三种近似计算公式：矩形公式，梯形公式和抛物线公式. 从误差估计公式可以看出：n 越大，即分割份数越多，误差越小. 并且一般说来，梯形公式的精确度比矩形公式的高，抛物线公式的精确度又比梯形公式的高.

在作近似计算时，有时分割份数是事先给定的，有时则需要根据误差要求，自己确定分割份数. 在后面的情况下，必须知道被积函数 $f(x)$ 的表达式，还要有办法估计 $f'(x)$，$f''(x)$ 或 $f^{(4)}(x)$ 的界.

在许多实际问题里，由于近似计算定积分的工作量太大，手算几乎不可能，因而必须利用现代计算工具——电子计算机. 利用计算机求定积分时，估计误差的办法与上面所说的不同，这里就不介绍了.

以上我们所提到的定积分的概念、理论和计算就是这一章的主要内容.

定积分有着广泛的应用，下一章将作专门讨论.

第四章

定积分的应用

在第三章，我们学习了定积分的理论和计算，这一章着重讨论定积分的几何应用和物理应用.

学习这一章，不仅要掌握一些具体的公式，更重要的是学习用定积分去解决实际问题的思想方法. 这里，我们着重介绍的是建立在定积分概念和微积分基本公式基础上的微元分析法(简称微元法).

第一节　微元分析法的基本思想

从第三章我们知道，定积分所要解决的问题是积分学的第二个基本问题——要求某个不均匀分布的整体量 A. 这个量可能是一个几何量(例如曲边梯形的面积)，也可能是一个物理量(例如变速直线运动的路程). 由于这些量是不规则或不均匀分布的，因而不可能一步把它们求出来. 而必须先把整体问题转化为局部问题，在局部范围内，“以直代曲”或“以不变代变”，近似地求得整体量在局部范围内的各部分，然后加起来，再取极限，从而求得整体量. 这就是用定积分来解决实际问题的基本思想:“分割——近似代替——求和——取极限”.

回顾以上四步(读者可重温一下第三章的两个实例以及求不均匀细棒的质量那个习题)，我们看到：凡是能用定积分来求的这些量，都有以下三个特点:

第一、它们都是分布在某一个区间上的，或者说，这些量都与自变量 x 的某个区间 $[a, b]$ 有关．因而它不是一个局部的量，而是涉及整个区间的量（故称为整体量）．

第二、这类整体量 A 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性．即如果把区间 $[a,b]$ 分为若干个部分区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，那么，量 A 等于那些对应于各个部分区间的局部量 ΔA_i 的总和，亦即

$$A=\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i.$$

第三、由于量 A 在区间 $[a, b]$ 上的分布是不均匀的，因而每个局部量 ΔA_i 在部分区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的分布一般也是不均匀的，无法用初等数学的方法一步把它的精确值求出来．我们设法"以直代曲"或"以不变代变"求得它的近似值：

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

这里 $f(x)$ 是我们根据实际问题所选择的一个已知函数，ξ_i 是区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的任意一点．近似等式(1)必须是合理的，就是说，当 $\Delta x_i \to 0$ 时，$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 与 ΔA_i 之差应当是比 Δx_i 更高阶的无穷小量，即 $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 是 ΔA_i 的主要部分．只有这样，当 $\Delta x_i \to 0$ 时，整体的近似等式

$$A=\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \tag{2}$$

的误差才有可能仍然是无穷小，从而也才有可能通过取极限得到精确等式

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

正是由于整体量 A 具有上述三个特点，才使得我们能够用"分割——近似代替——求和——取极限"的办法来求它．这四个步骤中，关键的一步是"近似代替"．必须正确地选择

被积函数 $f(x)$，写出局部范围内的近似等式(1).

但是，在实际做法上，由于整体量 A 是待求的，从而每个局部量 ΔA_i 是未知的，因此很难断定用来作为近似值的 $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 是不是 ΔA_i 的主要部分. 一般说来，我们只能通过多次实践，凭经验来作肯定或否定的回答.

上面所说用定积分来解决实际问题的四步，在实际应用时显得比较烦琐，书写有些啰嗦. 为简便起见，我们介绍在许多应用学科中经常采用的方法——微元分析法. 这个方法的根据是上述的四步(和微积分基本定理)，但是突出了"细分"与"求和"，变成了下面的两步：

第一步　分割区间 $[a, b]$，考虑任意一份——具有代表性的一份 $[x, x+\Delta x]$. 选择函数 $f(x)$，"以不变代变"，求得整体量相应于区间 $[x, x+\Delta x]$ 的局部量 ΔA 的近似值 $f(x)\cdot\Delta x$，即

$$\Delta A \approx f(x)\cdot\Delta x = f(x)\cdot dx.$$

$f(x)\cdot\Delta x$ 或 $f(x)\cdot dx$ 称为整体量 A 的*微元*.

第二步　当 $\Delta x\to 0$ 时，把这些微元无限相加，得到的定积分就是所求的整体量

$$A=\int_a^b f(x)dx.$$

用以上两步来解决实际问题的方法称为*微元分析法*，或*微元法*.

为什么用这样两步求出的定积分就是所要求的整体量 A 呢？

下面说说微元法的理论根据.

用函数 $A(x)$ 表示量 A 对应于可变区间 $[a, x]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的部分量，于是显然有

$$A(a)=0,\quad A=A(b)=A(b)-A(a).$$

考虑典型小区间$[x,\ x+\Delta x]$.函数$A(x)$在这个区间上的改变量为ΔA，它就是整体量A相应于$[x,\ x+\Delta x]$的局部量，我们找到了它的近似值——微元$f(x)\cdot\Delta x$. 上面已经说过，当$\Delta x\to 0$时，微元$f(x)\cdot\Delta x$应该是局部量ΔA的主要部分；又由于$f(x)\cdot\Delta x$是Δx的线性函数，因此，微元$f(x)\cdot\Delta x$在数量关系上应该是函数$A(x)$在点x处的微分，即

$$f(x)\cdot\Delta x=A'(x)\cdot\Delta x=dA.$$

这样，当$f(x)$在$[a,\ b]$上可积时，根据微积分基本定理，便得到

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b A'(x)dx=A(x)\Big|_a^b=A(b)-A(a)=A.$$

即整体量A可表为定积分

$$A=\int_a^b f(x)dx.$$

这就是微元法的理论根据. 我们再简单重复一下：微元法的第一步，是写出所求量A相应于典型小区间$[x,\ x+\Delta x]$的局部量ΔA的近似值——微元dA. 在数量关系上，dA是函数$A(x)$在点x处的微分. 第二步是把这些微元在$\Delta x\to 0$的过程中无限相加，也就是将微分表达式

$$dA=f(x)\Delta x=f(x)\cdot dx$$

从a到b求定积分，就得到所求的整体量

$$A=\int_{(a)}^{(b)}dA=\int_a^b f(x)dx.$$

以上两步中，关键的一步是选择函数$f(x)$，正确地写出微分表达式

$$dA=f(x)\cdot dx.$$

但是，由于函数$A(x)$是不知道的，因而很难断定我们写出来

的 $f(x)\cdot dx$ 究竟是不是它的微分 dA. 如上所述，通过多次实践，就能逐渐掌握规律.

下面两节，我们介绍怎样用微元法来解决一些几何问题和物理问题.

第二节　定积分的几何应用

2.1　平面图形的面积

1. 直角坐标系下的面积公式

设有曲线

$$y=f(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

其中 $f(x)\geqslant 0$. 试求由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ 及 $y=0$ 所围成的曲边梯形的面积 A(图 4-1).

解：根据定积分的几何意义，知

$$A=\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

下面，为了帮助大家熟悉微元法，我们再用这个方法把公式(1)推导一遍.

第一步　分割$[a, b]$，考虑典型小区间$[x, x+dx]$. 相

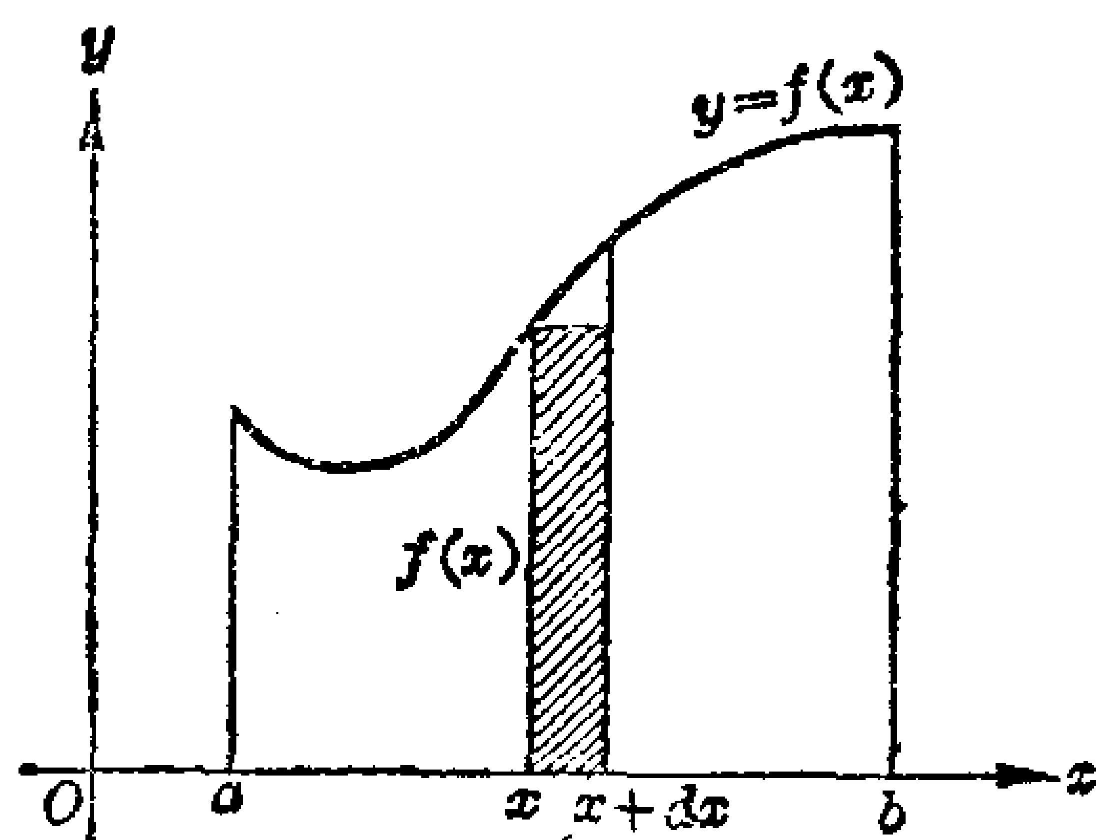


图　4-1

应于这个小区间的面积 ΔA 可以用面积微元 dA 来近似代替，dA 是图 4-1 中带斜线的小矩形面积，因而

$$dA=\text{高}\times\text{底}=f(x)\cdot dx.$$

第二步 当 $\Delta x\to 0$ 时，将 dA 无限相加，即将 dA 从 a 到 b 求定积分，就得到所求面积

$$A=\int_{(a)}^{(b)} dA=\int_a^b f(x)\,dx.$$

这就是公式(1)。

思考题

1. 设有两条曲线

$$y=f(x),\quad y=g(x).$$

这里 $f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0$. 试用微元法证明由 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积(图 4-2)为

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx. \tag{2}$$

2. 设 $f(x)\geqslant g(x)$, 但 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有正有负(图 4-3)，试说明由曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 及直线 $x=a$, $x=b$ 所围成的面积仍用公式(2)表示。

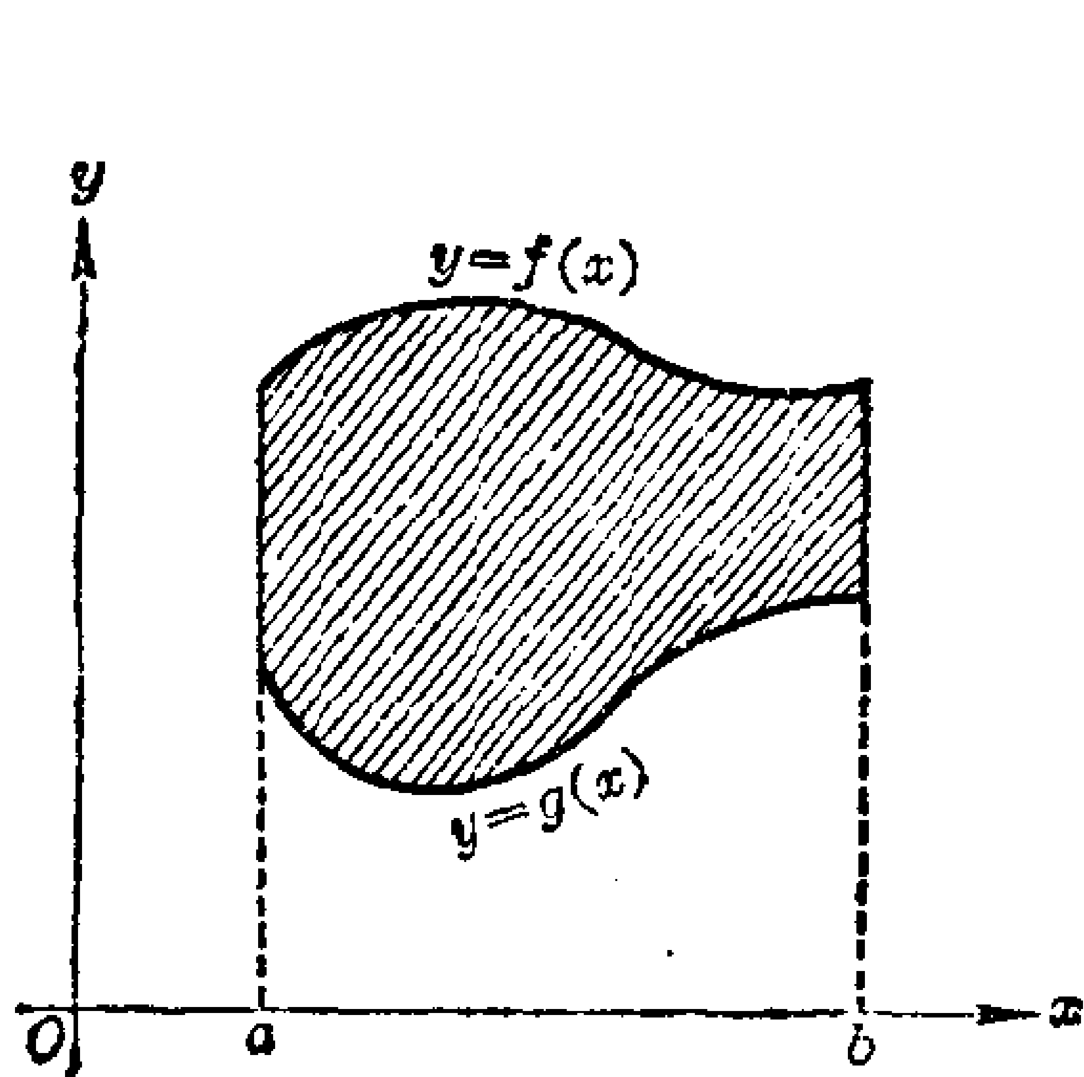


图 4-2

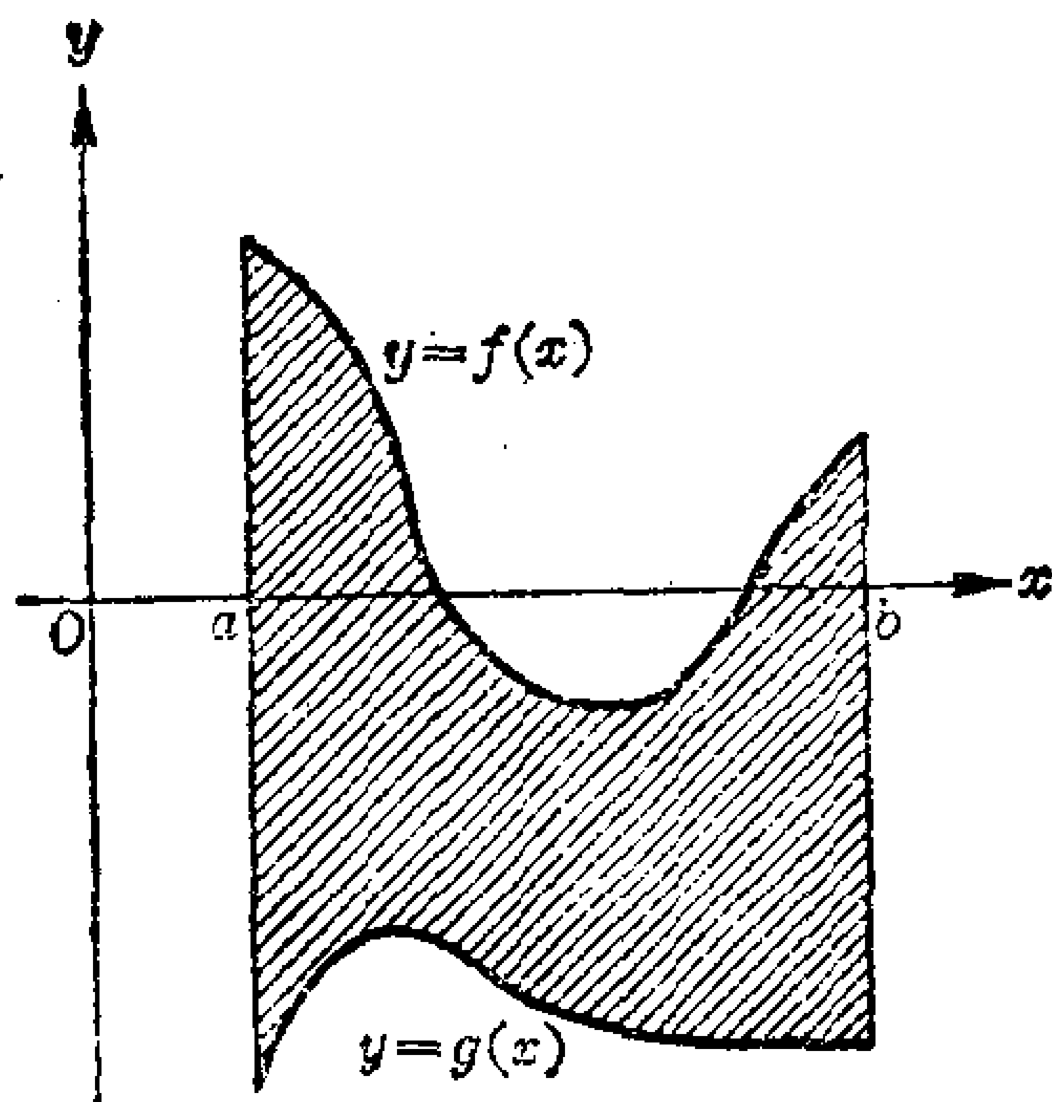


图 4-3

提示：只须将 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 沿 y 轴的正方向同时平移 k 个单位，使得

$$f(x)+k\geqslant 0, \qquad g(x)+k\geqslant 0.$$

这时，由曲线 $y=f(x)+k$，$y=g(x)+k$ 及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的面积显然仍是 A，而 A 可由公式(2)得到：

$$A=\int_a^b [(f(x)+k)-(g(x)+k)]dx,$$

再化简即可。

【例 1】 求由曲线 $y=e^x$，$y=e^{-x}$ 及直线 $x=1$ 所围成的面积 A(图 4-4)。

解：由公式(2)，知

$$A=\int_0^1 (e^x-e^{-x})dx=[e^x+e^{-x}]\Big|_0^1=e+\frac{1}{e}-2.$$

【例 2】 求由曲线 $y=1-\dfrac{x^2}{4}$ 与 $y=-\dfrac{5}{12}x$ 所围成的面积 A(图 4-5)。

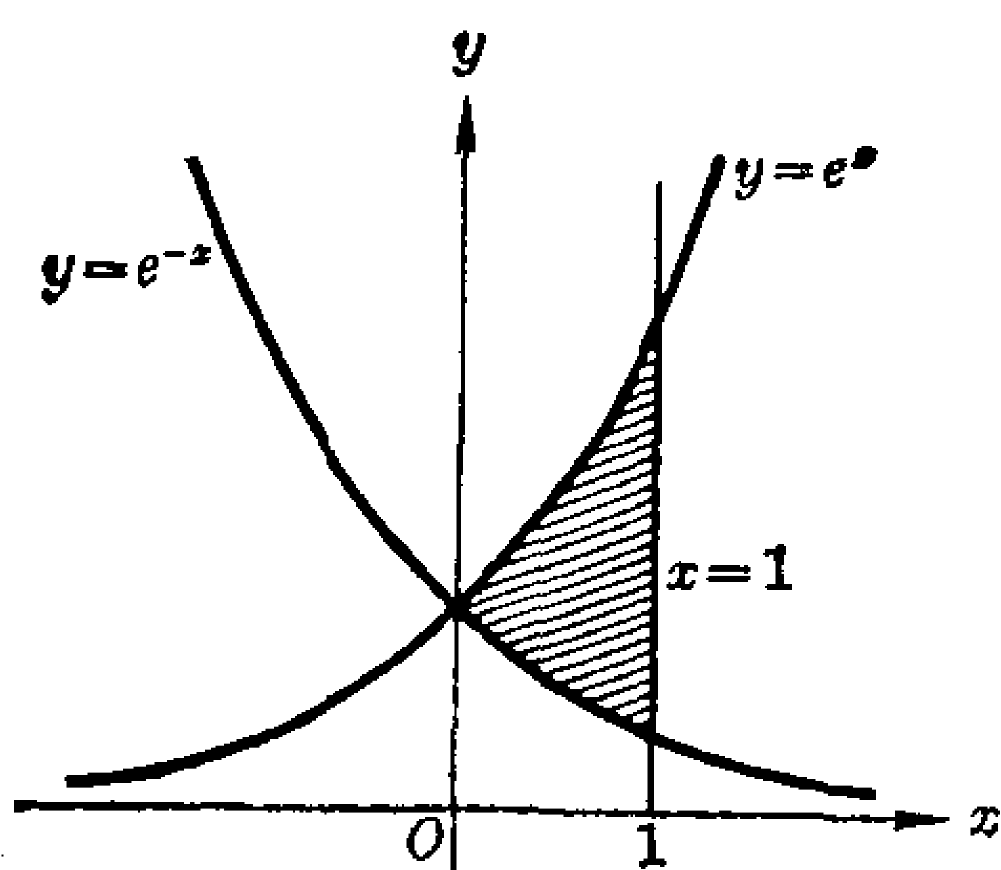


图 4-4

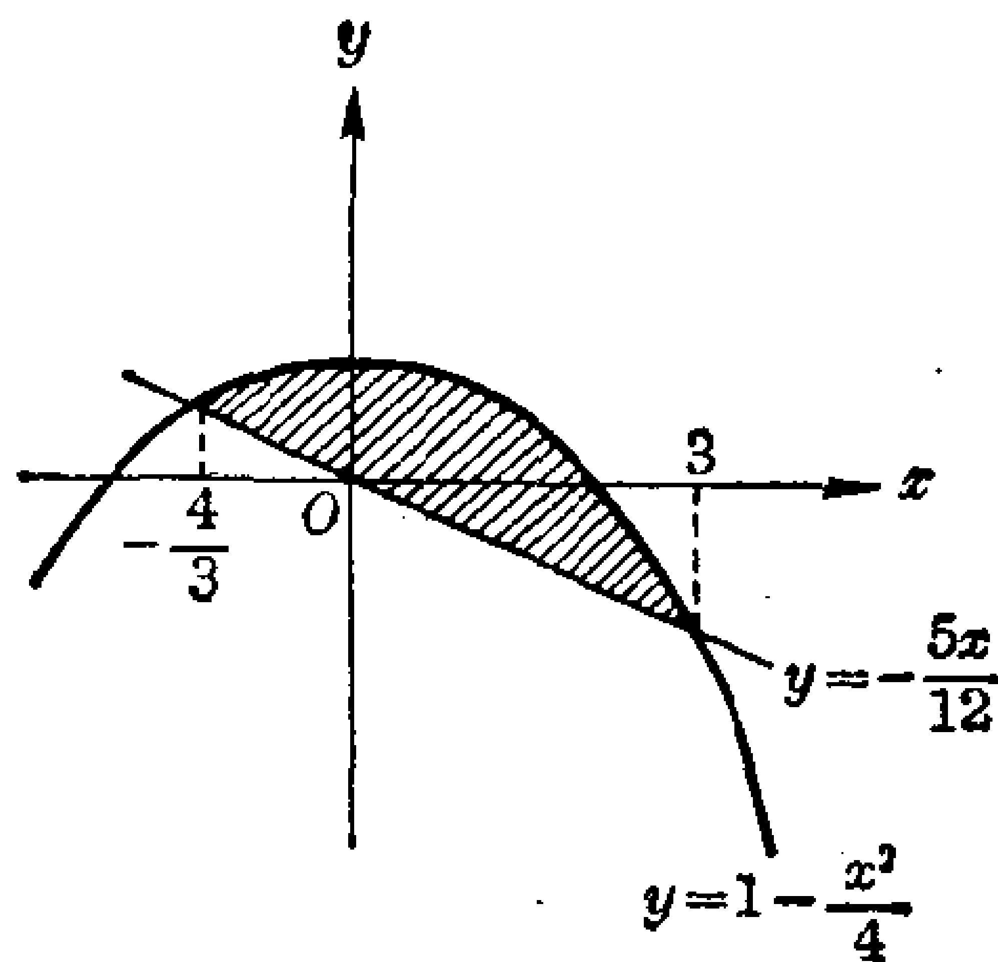


图 4-5

解：先求出曲线 $y=1-\dfrac{x^2}{4}$ 与 $y=-\dfrac{5}{12}x$ 的交点的横

坐标. 为此,解方程组

$$\begin{cases} y=1-\dfrac{x^2}{4}, \\ y=-\dfrac{5}{12}x, \end{cases}$$

得
$$x_1=-\frac{4}{3}, \quad x_2=3.$$

然后,由公式(2),得到面积

$$A=\int_{-\frac{4}{3}}^{3}\left[\left(1-\frac{x^2}{4}\right)-\left(-\frac{5}{12}x\right)\right]dx$$
$$=\int_{-\frac{4}{3}}^{3}\left[1+\frac{5}{12}x-\frac{x^2}{4}\right]dx=3\frac{253}{648}.$$

【例 3】 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积 A(图 4-6).

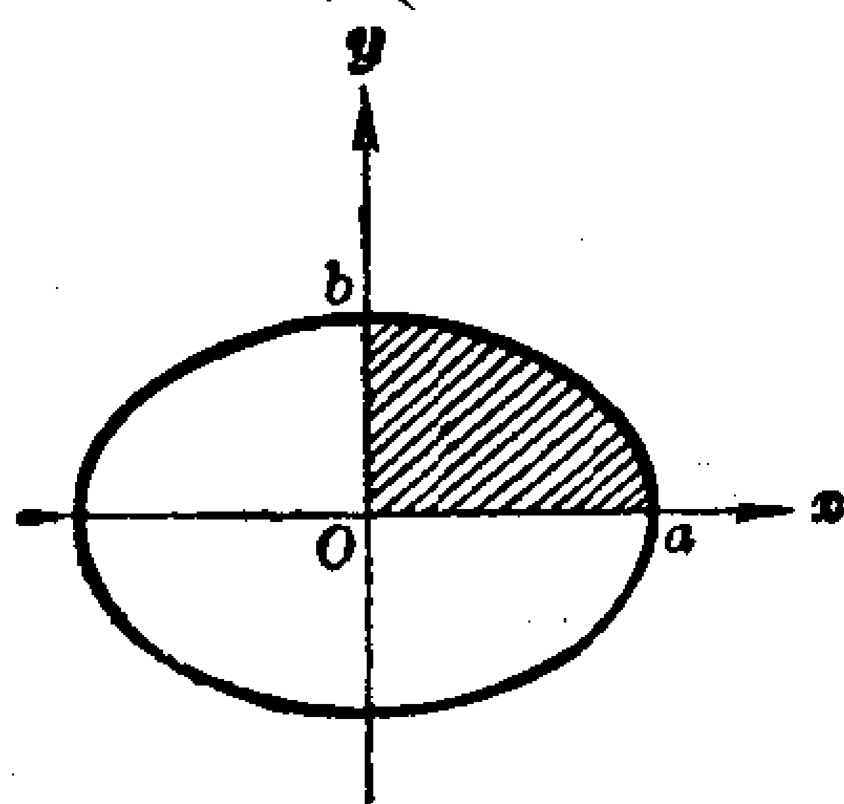


图 4-6

解:由对称性,只须计算椭圆在第一象限那部分的面积,再四倍即可.

由公式(1),有

$$\frac{A}{4}=\int_0^a y(x)dx.$$

从椭圆方程解出

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

上半椭圆对应于方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

因此

$$\frac{A}{4}=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\xlongequal{\text{查表}} \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}ab,$$

从而 $$A=\pi ab.$$

这个题也可以利用椭圆的参数方程来作.

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程是

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

椭圆在第一象限的部分对应于参数的变化范围是

$$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

选参数 t 作为新的积分变量,则由 $x=a\cos t$, 知:

当 $x=0$ 时, $\qquad t=\frac{\pi}{2}$,

当 $x=a$ 时, $\qquad t=0$.

又 $\qquad dx=d(a\cos t)=-a\sin t dt$.

根据定积分的换元积分法,得到

$$\frac{A}{4}=\int_0^a y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\cdot(-a\sin t)dt$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{\pi}{4}ab,$$

从而 $$A=\pi ab.$$

当平面图形的边界曲线由方程

$$x=\varphi(y)$$

给出，其中 $\varphi(y)\geqslant 0$（图 4-7），则类似于公式(1)不难推出：由曲线 $x=\varphi(y)$ 及直线 $x=0, y=c, y=d$ 所围成的面积是

$$A=\int_c^d \varphi(y)dy. \tag{3}$$

从而导出类似于公式(2)的如下结果：

由曲线 $x=\varphi(y)$，$x=\psi(y)$ 及直线 $y=c$，$y=d$ 所围成的面积是

$$A=\int_c^d [\psi(y)-\varphi(y)]dy, \tag{4}$$

其中 $\varphi(y)\leqslant\psi(y)$（图 4-8）。

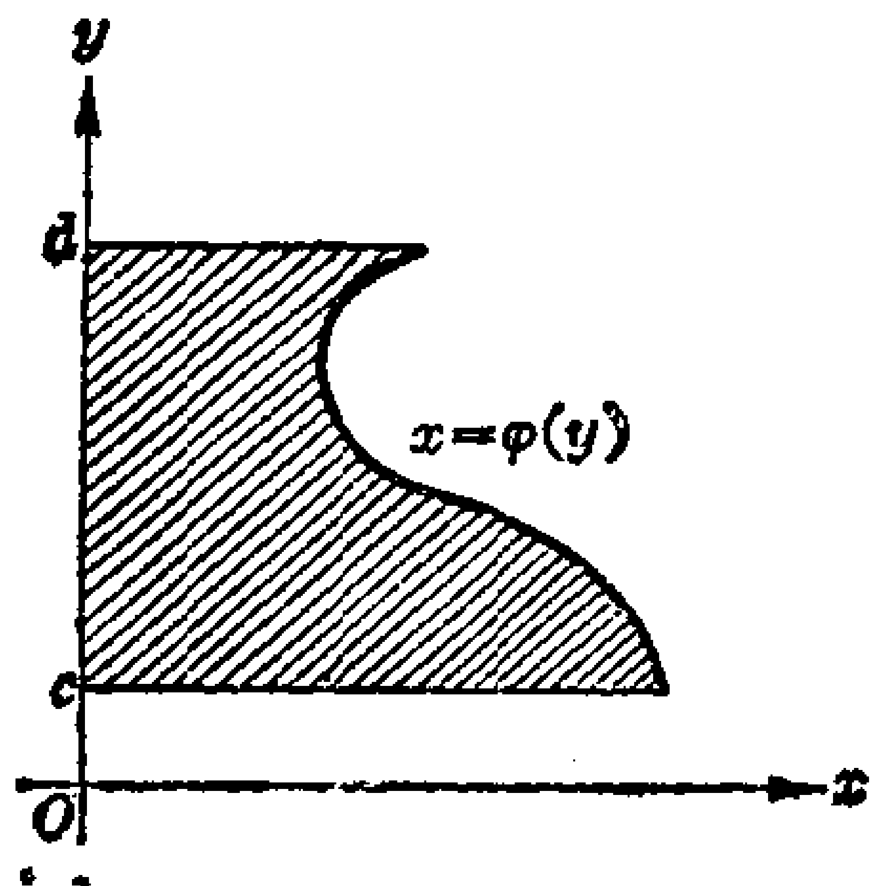


图 4-7

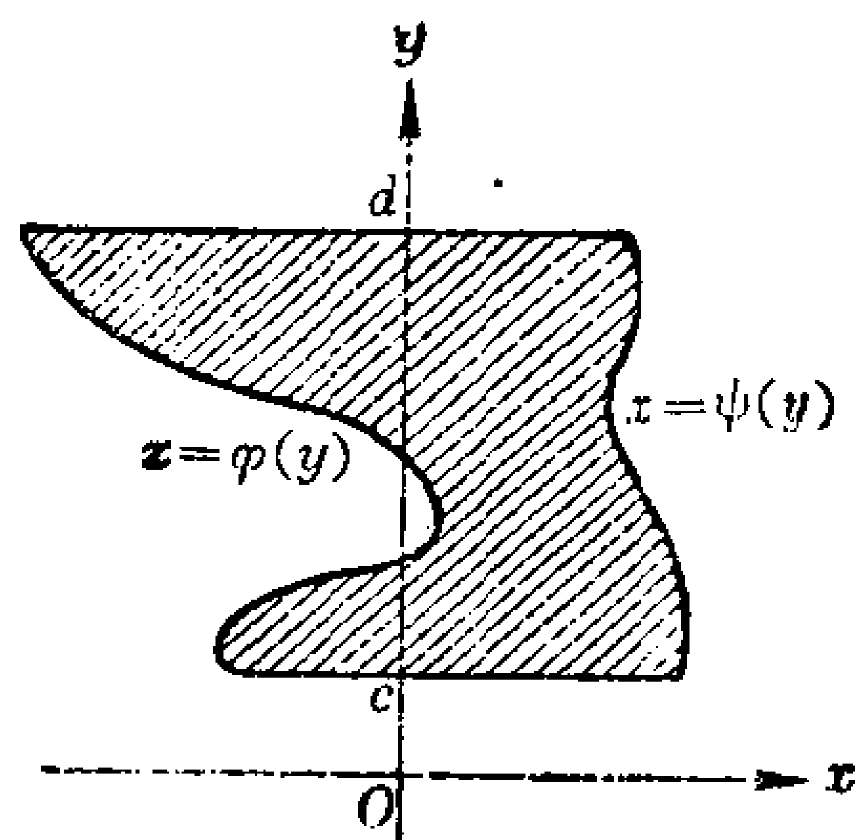


图 4-8

【例 4】 求由曲线 $xy=1$ 及直线 $y=x$，$y=2$ 所围成的面积 A（图 4-9）。

解：先求出曲线 $xy=1$ 与直线 $y=x$ 交点的纵坐标. 为此，解方程组

$$\begin{cases} xy=1, \\ y=x, \end{cases}$$

得到 $y_1=1$，$y_2=-1$（舍去）。

由公式(4)，得到面积

$$A=\int_1^2\left[y-\frac{1}{y}\right]dy=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

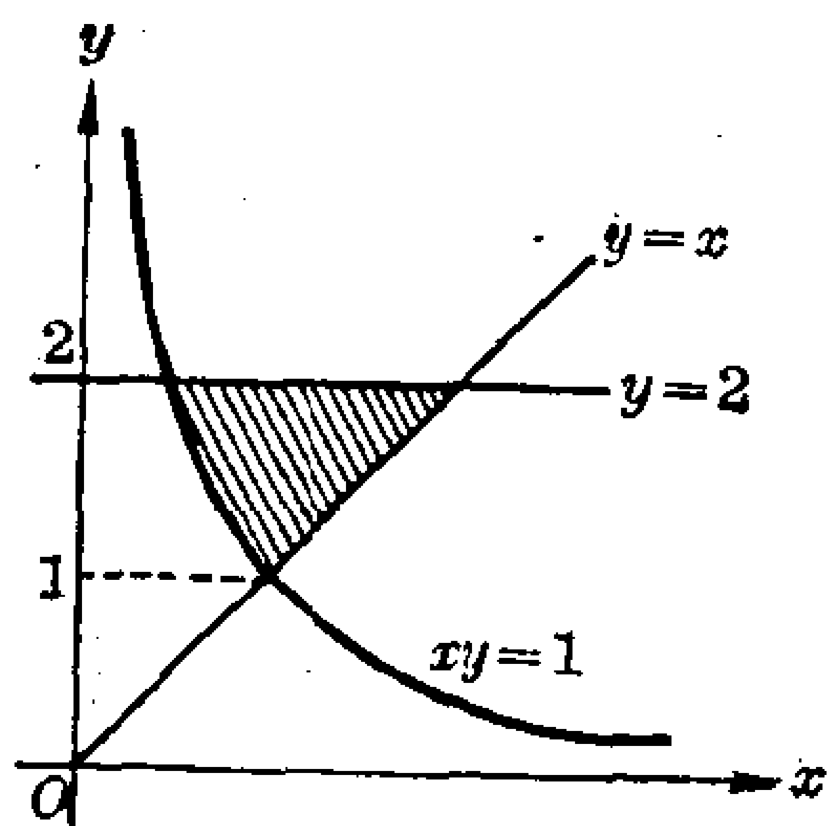


图 4-9

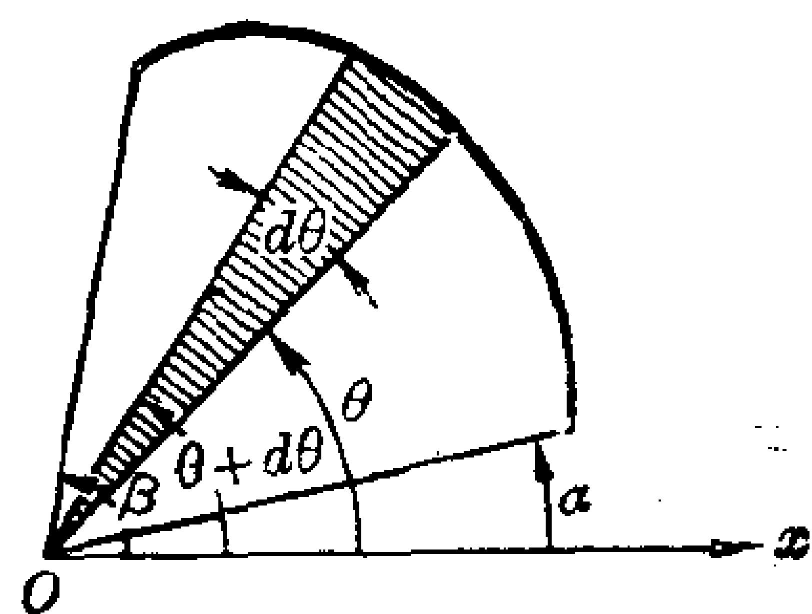


图 4-10

2. 极坐标系下的面积公式

设有曲线 $r=r(\theta)$ (这里 $r=r(\theta)$ 是 θ 的单值函数)，求由 $r=r(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围成的曲边扇形的面积 A (图 4-10)。

解：第一步　分割角度 θ 的变化区间 $[\alpha, \beta]$，考虑典型小区间 $[\theta, \theta+d\theta]$. 相应于这个小区间的小曲边扇形面积 ΔA 可用小圆扇形的面积 dA 来近似代替，这个小圆扇形的半径是 $r(\theta)$ (图 4-10)，因而由圆扇形面积的公式得到面积微元

$$dA=\frac{1}{2}r^2(\theta)\cdot d\theta.$$

第二步　当 $\Delta\theta\to 0$ 时，将 dA 无限求和，即将上式从 α 到 β 求定积分，得到面积

$$A=\int_{(\alpha)}^{(\beta)}dA=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta. \tag{5}$$

【例 5】　求阿基米德螺线

$$r=a\theta \quad (a>0)$$

最初一圈与极轴所围成的面积 A(图 4-11).

解: 螺线的最初一圈对应于 θ 从 0 到 2π. 由公式(5), 便得到

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\theta)^2d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\theta^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3.$$

【例 6】 求双纽线

$$r^2=a^2\cos 2\theta \quad (a>0)$$

所围成的面积 A(图 4-12).

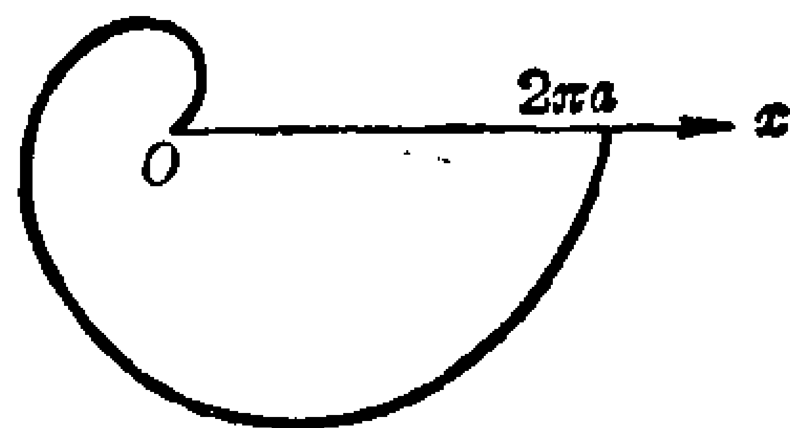


图 4-11

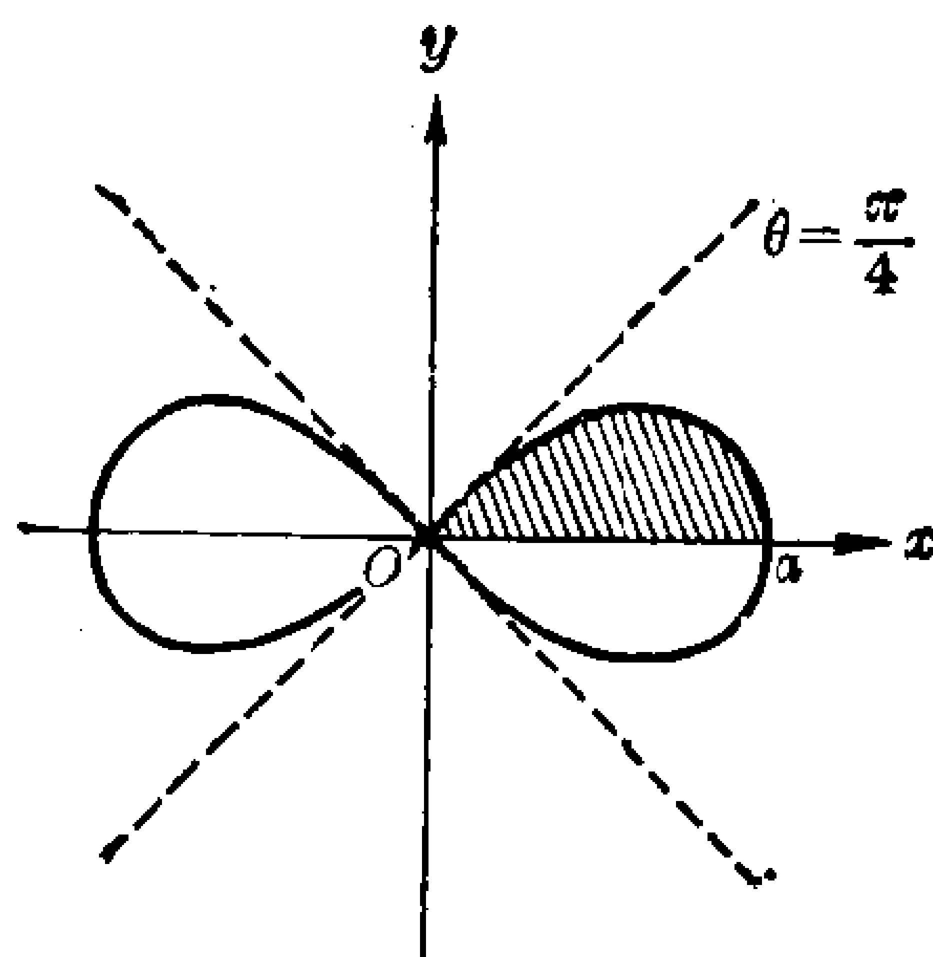


图 4-12

解: 由图形的对称性, 只须求出在第一象限内的面积, 再四倍即可.

在第一象限内, 双纽线的极角 θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$. 因此由公式(5), 得到

$$\frac{A}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}.$$

从而 $$A=a^2.$$

2.2 已知平行截面的面积，求立体的体积

假设有一个立体，它是由封闭曲面和垂直于 x 轴的两个平面所围成的(图 4-13)．用垂直于 x 轴的一组平面去截它，得到许多平行截面．如果任意一个平行截面的面积都是已知的，即对任意一点 $x(a\leqslant x\leqslant b)$，截面积 $A=A(x)$ 是已知的连续(或分段连续)函数，那么，此立体的体积为

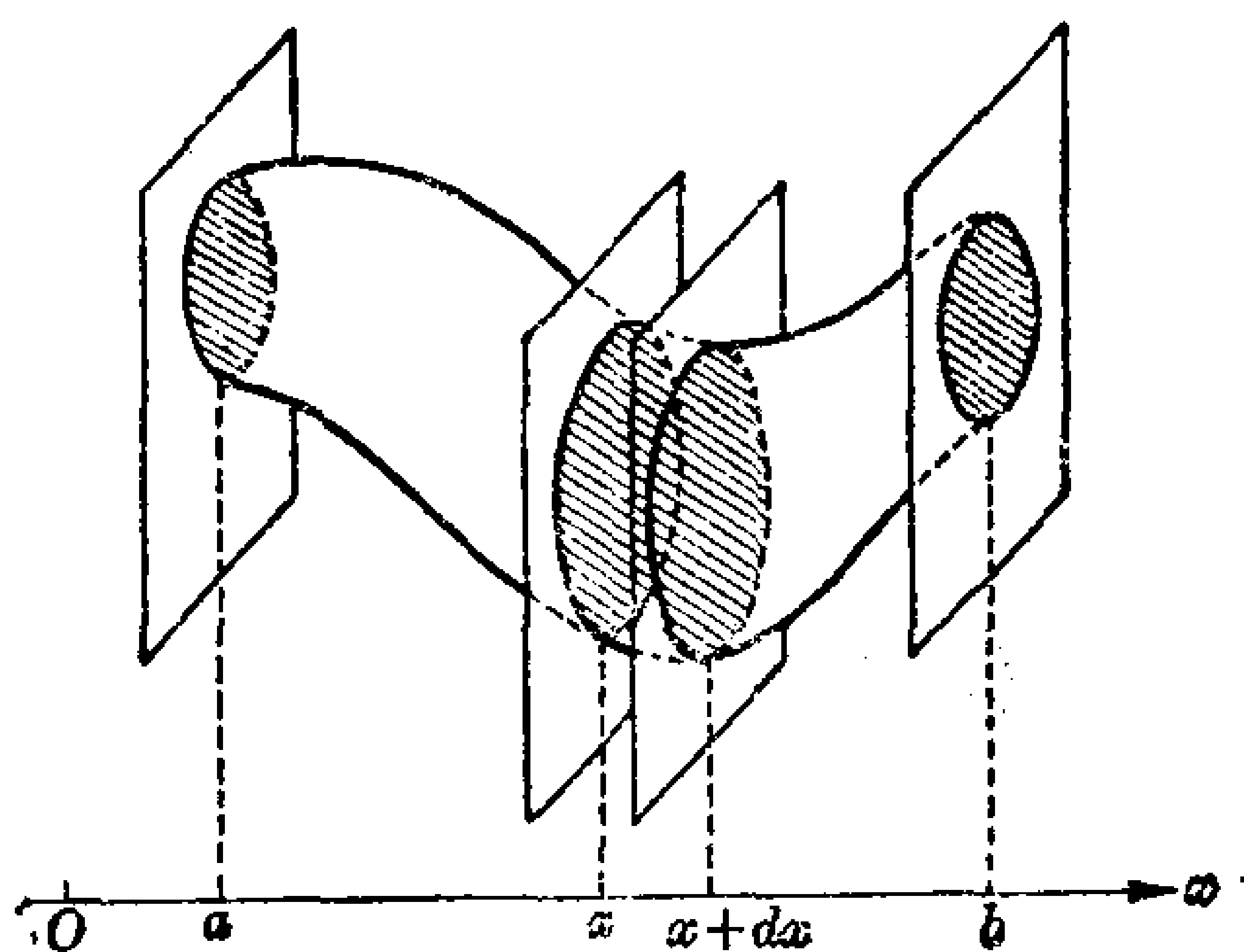


图 4-13

$$V=\int_a^b A(x)dx. \tag{6}$$

我们用微元法来推导这一公式．

第一步　分割区间 $[a, b]$，考虑典型小区间 $[x, x+dx]$．在这一小段上，把立体近似地看成小正柱体：上底面积和下底面积都是 $A(x)$，而高是 dx．于是得到体积微元

$$dV=A(x)\cdot dx.$$

第二步　当 $\Delta x\to 0$ 时，将 dV 无限求和，即将上式从 a 到 b 求定积分，便得到立体的体积

$$V=\int_{(a)}^{(b)}dV=\int_a^b A(x)dx.$$

【例 7】 求由两个圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 及 $x^2+z^2=a^2$ 所围之体积 V(图 4-14 为所求体积的八分之一).

解: 过点 x $(0\leqslant x\leqslant a)$ 作垂直于 x 轴的平面，与所给立体相截，截面为一正方形,边长为

$$PQ=z=\sqrt{a^2-x^2},$$

因而截面积为

$$A(x)=z^2=a^2-x^2.$$

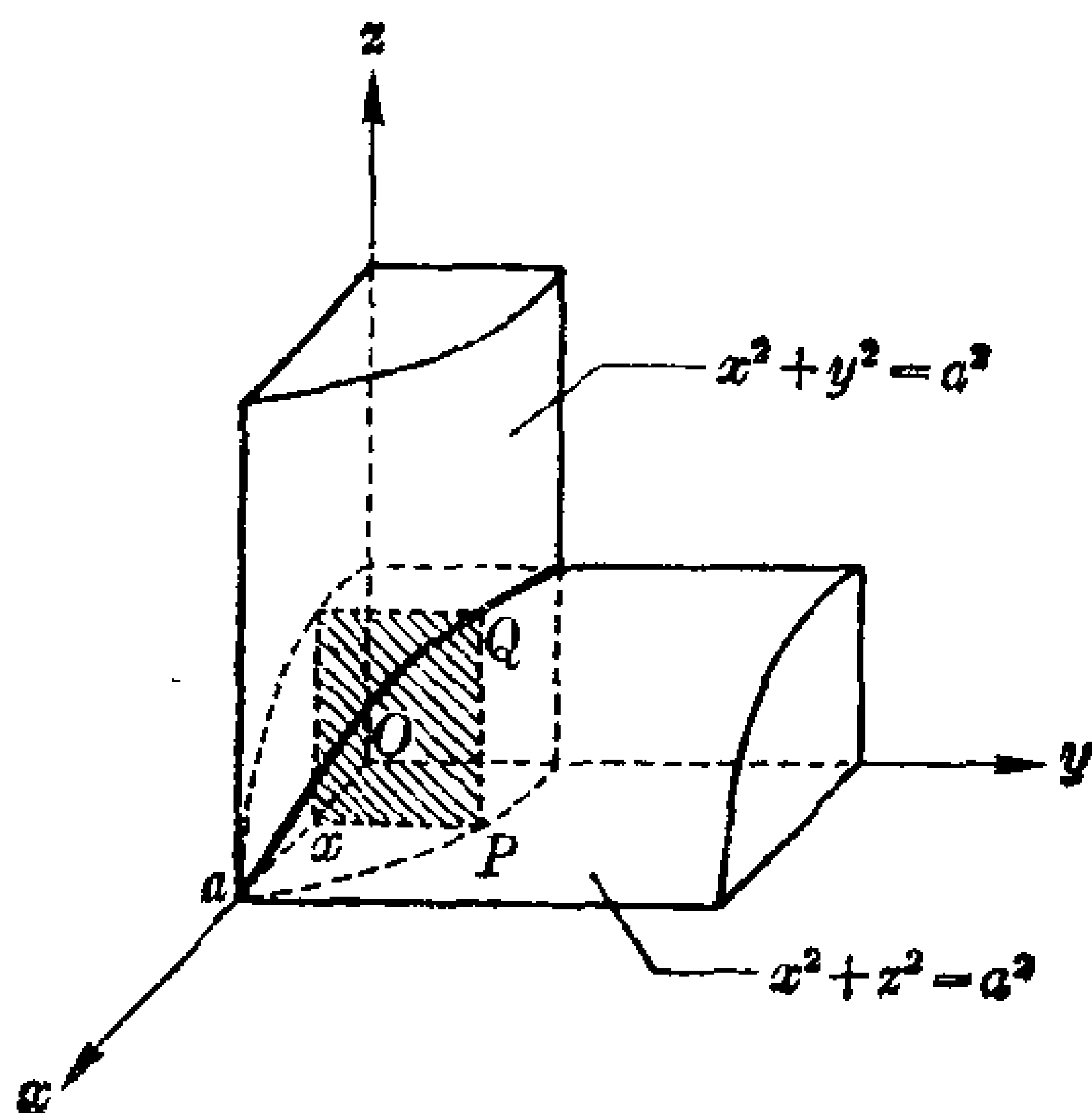


图 4-14

由公式(6),得所求体积的 $\frac{1}{8}$ 为

$$\frac{V}{8}=\int_0^a A(x)dx=\int_0^a (a^2-x^2)dx=\frac{2}{3}a^3,$$

从而

$$V=\frac{16}{3}a^3.$$

公式(6)是很有用的. 由它可以立刻导出下面所要介绍的旋转体的体积公式,并且将来学习多元积分学时,解释化二重积分为累次积分的公式时也要用到它.

2.3 旋转体的体积

设有连续曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 绕 x 轴旋转一周，求所成的旋转体*)的体积 V (图 4-15).

解: 这里不必再用微元法,只须利用上面的公式(6).

过 $[a, b]$ 上的任意一点 x, 垂直于 x 轴的横截面是一个

*) 旋转体系指实心立体. 有时，我们也把这里的旋转体说成是由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a, x=b$ $(a<b)$ 所围曲边梯形绕 x 轴旋转一周所产生的.

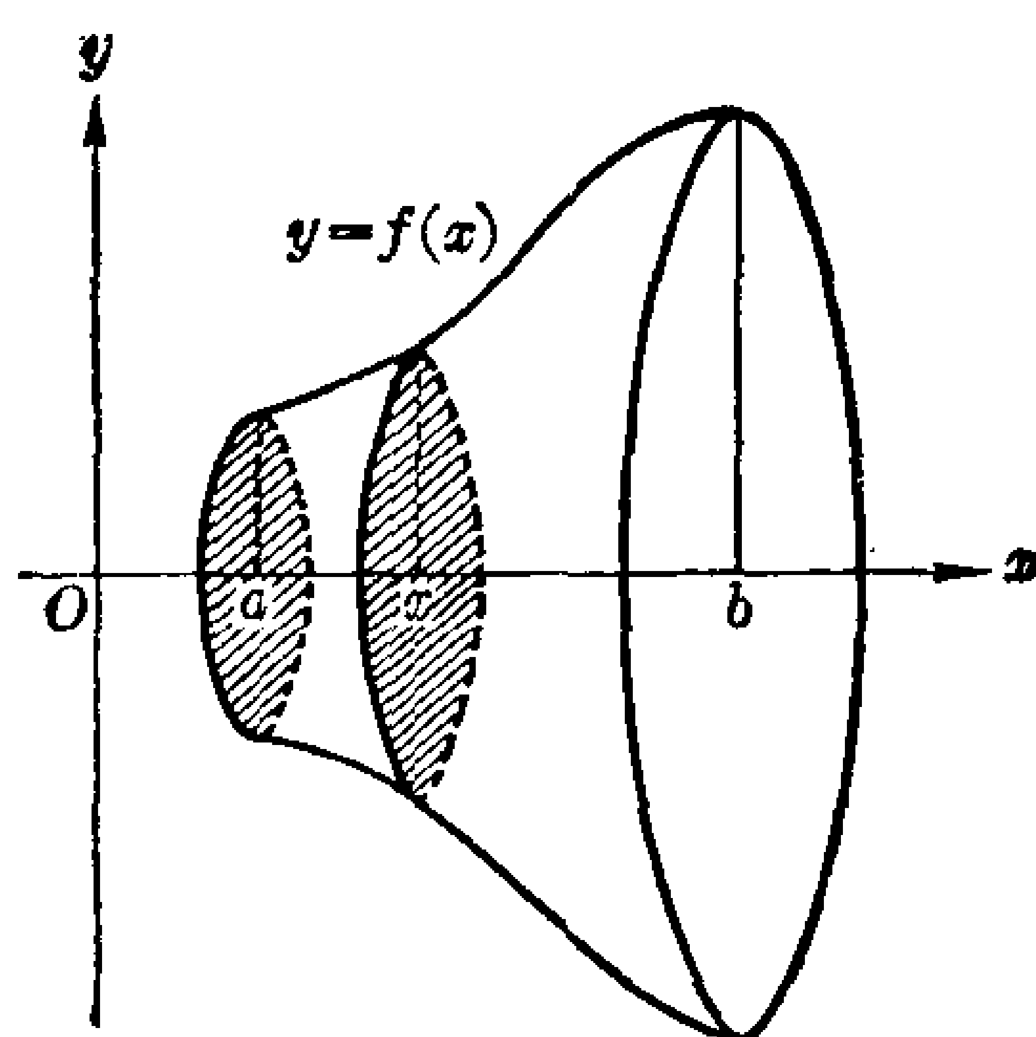


图 4-15

圆，其半径为 $y=f(x)$，因此横截面面积是

$$A(x)=\pi y^2=\pi f^2(x),$$

由公式(6)，即得旋转体的体积公式

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{7}$$

思考题 证明由连续曲线

$$x=\varphi(y)\quad (c\leqslant y\leqslant d)$$

绕 y 轴旋转一周所产生的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy \tag{8}$$

(图 4-16)。

【例 8】 证明由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

绕 x 轴旋转所得旋转椭球体的体积(图 4-17)为

$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

【证】 由椭圆方程

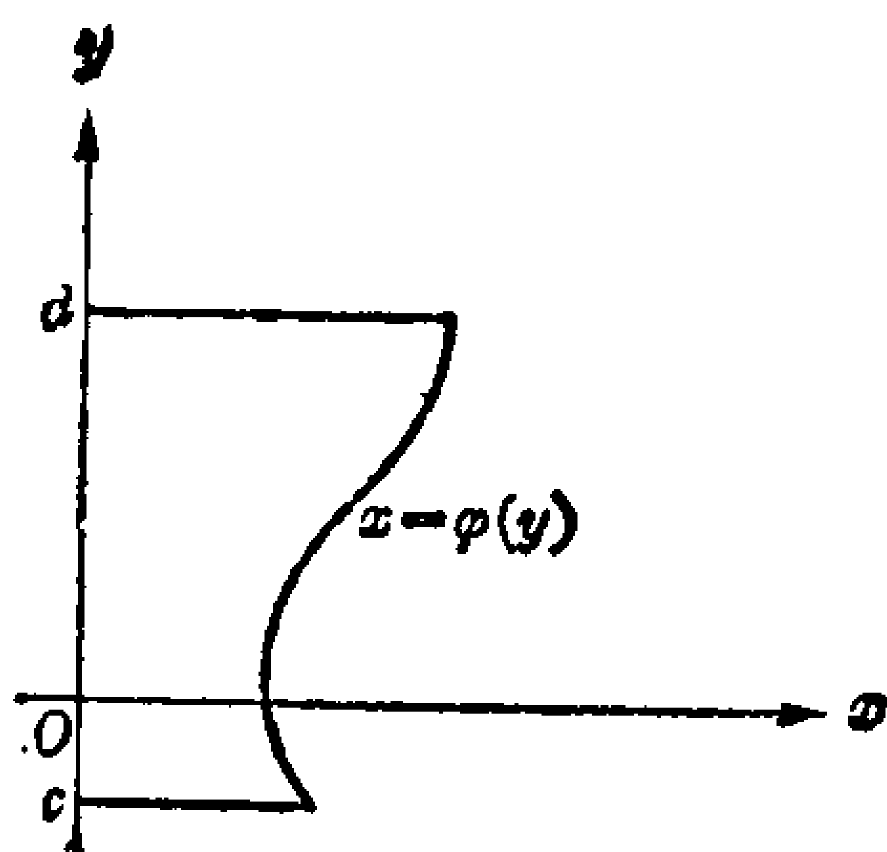


图 4-16

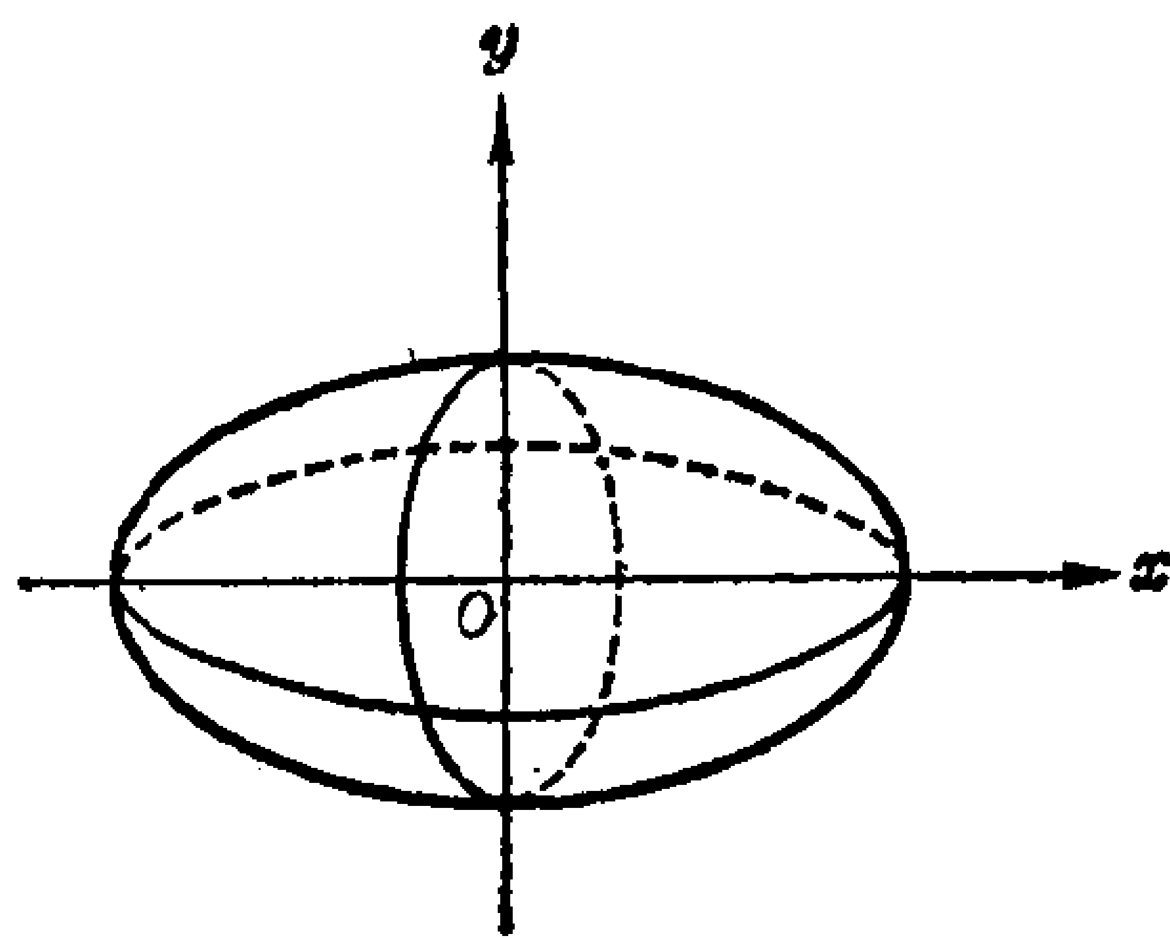


图 4-17

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

得到
$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

由公式(7)，得体积

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\,dx=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$
$$=\frac{4}{3}\pi ab^2. \quad ▌$$

当 $a=b$ 时，则 $V=\frac{4}{3}\pi a^3$，这时的旋转体是半径为 a 的球体．于是证明了球的体积公式．

【例 9】 求由星形线

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \quad (a>0)$$

绕 x 轴旋转所成的旋转体体积 V(图 4-18)．

解：由星形线方程

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

解出
$$y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}},$$

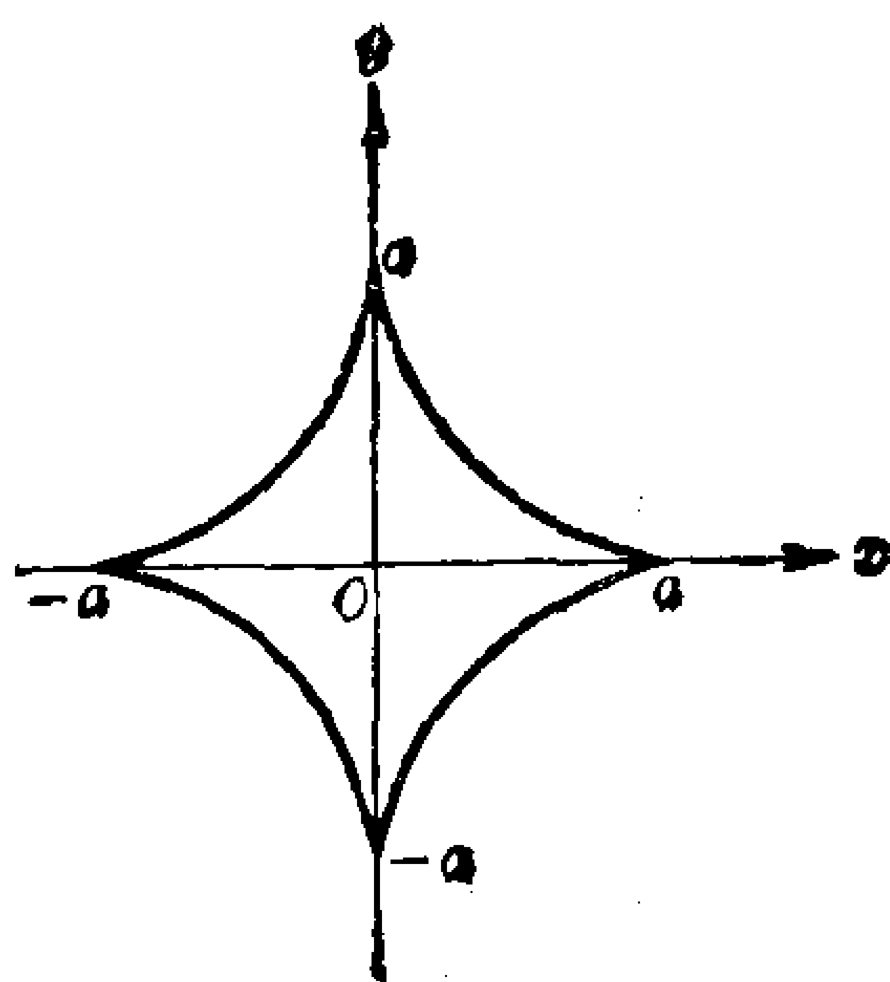


图 4-18

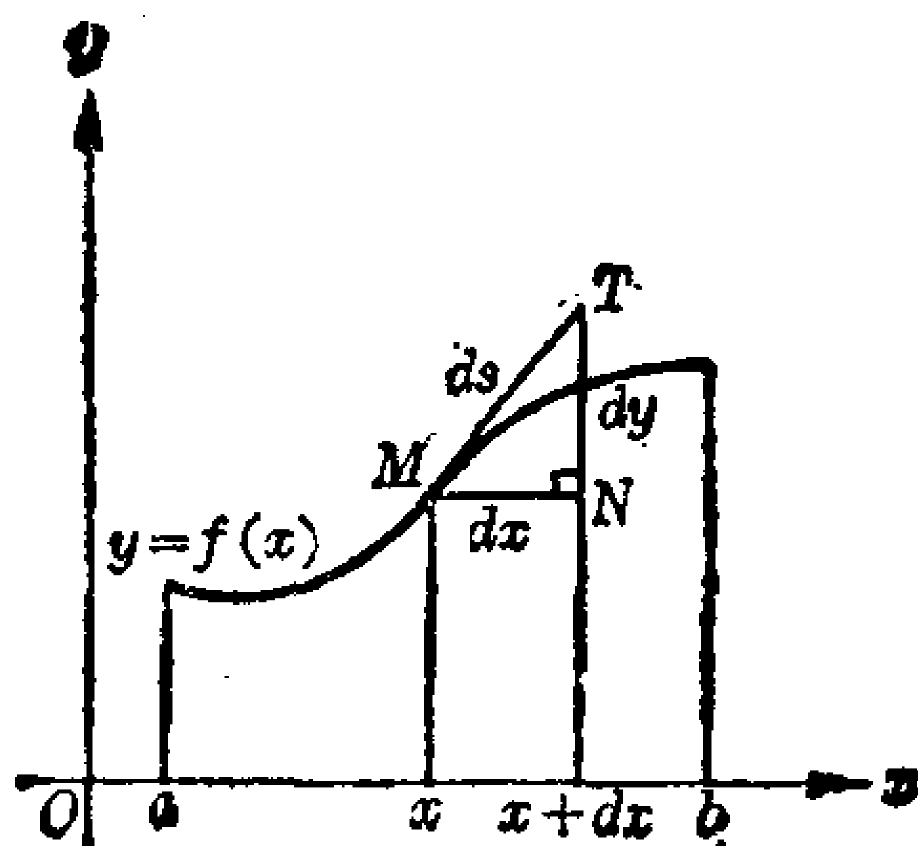


图 4-19

于是 $$y^2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3.$$

由公式(7)，得到旋转体体积

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx\\
&=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3dx\\
&=2\pi\int_0^a[a^2-3a^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}-x^2]dx\\
&=2\pi\left[a^3-\frac{9}{5}a^3+\frac{9}{7}a^3-\frac{1}{3}a^3\right]=\frac{32}{105}\pi a^3.
\end{aligned}$$

2.4 平面曲线的弧长

设有一条光滑的平面曲线弧

$$y=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

试计算它的长度(称为弧长) s. 这里，光滑曲线是指：不仅曲线上每一点都有切线，而且切线随着点的位置而连续转动，即 $f'(x)$ 是连续函数.

为了求曲线段的弧长，我们用微元法.

第一步 分割区间 $[a, b]$，考虑任意一份 $[x, x+dx]$. 相

应的弧长可近似用弧长微元——弧微分 ds 来代替. 而 ds 在以前我们已经求出过:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad (\text{取 } dx>0) \\ &= \sqrt{1+y'^2}\,dx. \end{aligned}$$

它是微分三角形 MNT 的斜边长(图 4-19).

第二步　将 ds 从 a 到 b 求定积分, 得到曲线段的弧长公式

$$s=\int_{(a)}^{(b)} ds=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{9}$$

当曲线段由参数方程

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出时, 则弧微分是

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \\ &= \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right](dt)^2} \\ &\xlongequal{\text{取弧长的增加对应于参数的增加}} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt. \end{aligned}$$

可以证明, 此时弧长公式为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt. \tag{10}$$

当曲线段由极坐标方程

$$r=r(\theta) \quad (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

给出时, 则可选 θ 作为参数, 于是曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cdot\cos\theta, \\ y=r(\theta)\cdot\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta).$$

从而 $$x'(\theta)=r'(\theta)\cdot\cos\theta-r(\theta)\cdot\sin\theta,$$

$$y'(\theta)=r'(\theta)\cdot\sin\theta+r(\theta)\cdot\cos\theta,$$

$$x'^2(\theta)+y'^2(\theta)=[r'(\theta)\cdot\cos\theta-r(\theta)\cdot\sin\theta]^2+[r'(\theta)\cdot\sin\theta+r(\theta)\cdot\cos\theta]^2=r'^2(\theta)+r^2(\theta).$$

$$ds=\sqrt{r'^2(\theta)+r(\theta)}\,d\theta.$$

由公式(10)，便得到极坐标系下的弧长公式

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}d\theta. \qquad (11)$$

【例 10】 证明半径为 R 的圆周长为 $2\pi R$.

【证】 取坐标系如图 4-20 所示，于是圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2.$$

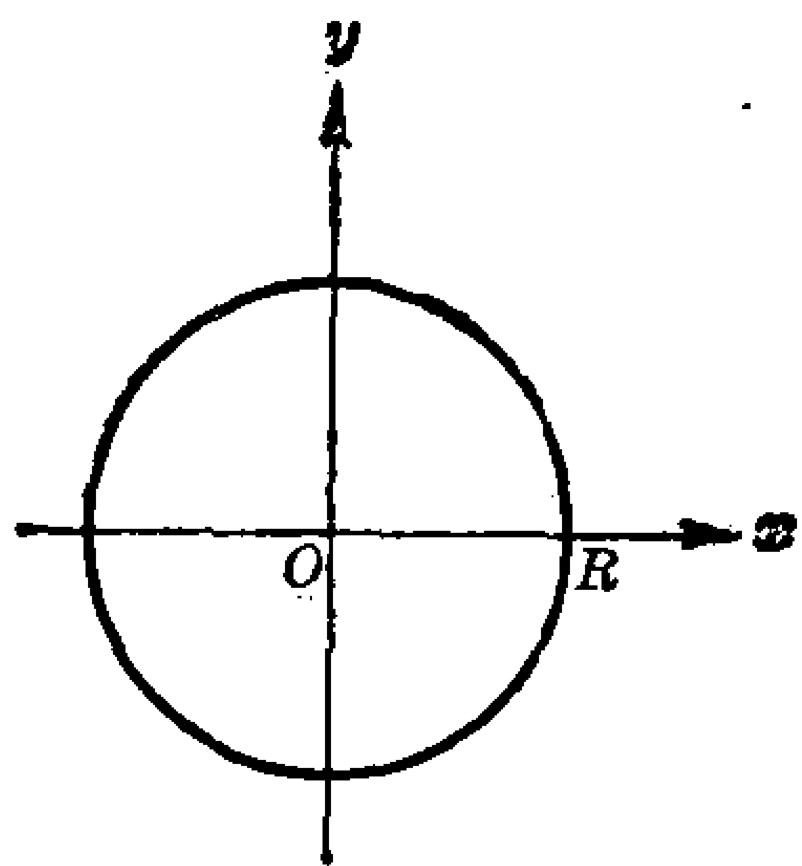


图 4-20

由对称性，只需求第一象限的弧长，再四倍即可.

第一象限圆弧的方程为

$$y=\sqrt{R^2-x^2}.$$

因而， $$y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

由公式(9)，得到

$$s=4\int_0^R\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$=4R\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$$

$$=4R\cdot\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=2\pi R. \quad \blacksquare$$

这个题也可以用参数方程来作.

圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=R\cos t,\\ y=R\sin t\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

于是弧微分为

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

$$=\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,dt$$

$$=Rdt.$$

由公式(10)，得圆周长

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}Rdt=2\pi R.$$

此题还可用极坐标方程来证明.

取极轴与 x 轴重合，极点与原点重合，则圆周的极坐标方程为

$$r=R\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

于是 $$r'=0,$$

$$r'^2=0,\quad r^2=R^2,$$

弧微分为 $$ds=\sqrt{r'^2+r^2}\,d\theta=Rd\theta.$$

由公式(11)，得圆周长

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{r'^2+r^2}\,d\theta$$
$$=R\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi R.$$

从这里我们看到：不论选取什么坐标系，所得到的弧长是一样的。

【例 11】 求摆线（即旋轮线）

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

第一拱的弧长 s.

解：$x'(t)=a(1-\cos t)$,

$y'(t)=a\sin t$,

因此，
$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$
$$=a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$
$$=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt.$$

第一拱相应于参数从 0 到 2π，因而 $\frac{t}{2}$ 从 0 到 π，在此范围内，$\sin\frac{t}{2}$ 不取负值，于是由公式(10)，有

$$s=\int_0^{2\pi}2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt$$
$$=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a.$$

【例 12】 求椭圆

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$$

的周长 s（假定 $a>b>0$）.

解：$x'(t)=-a\sin t$,

$$y'(t)=b\cos t,$$

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}=a\sqrt{1-\cos^2 t+\frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}$$

$$=a\sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2 t}=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt,$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$是椭圆的离心率.

由公式(10),并利用椭圆的对称性,知椭圆的周长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt.$$

这是第二型椭圆积分."椭圆积分"的名称即由此而来.

【例 13】 求双纽线

$$r^2=2a^2\cos 2\theta \quad (a>0)$$

从 $\theta=0$ 到 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 的弧长 s.

解:在等式 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 两端对 θ 求导数,得到

$$2rr'=-4a^2\sin 2\theta,$$

$$r'=\frac{-2a^2\sin 2\theta}{r},$$

$$ds=\sqrt{r'^2+r^2}\,d\theta=\sqrt{\frac{4a^4\sin^2 2\theta}{r^2}+r^2}\,d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{4a^4\sin^2 2\theta+r^4}{r^2}}\,d\theta=\sqrt{\frac{4a^4\sin^2 2\theta+4a^4\cos^2 2\theta}{2a^2\cos 2\theta}}\,d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{4a^4}{2a^2\cos 2\theta}}\,d\theta=\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}\,d\theta.$$

由公式(11)，得到

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}d\theta=\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}d\theta.$$

这是第一型椭圆积分.

我们看到：求曲线段的弧长时，经常得出椭圆积分．这些积分不能用牛顿-莱布尼兹公式来计算(因为被积函数的原函数不是初等函数).

旋转体的侧面积

设有光滑曲线段

$$y=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

求它绕 x 轴旋转所成之旋转体的侧面积 A(图 4-21).

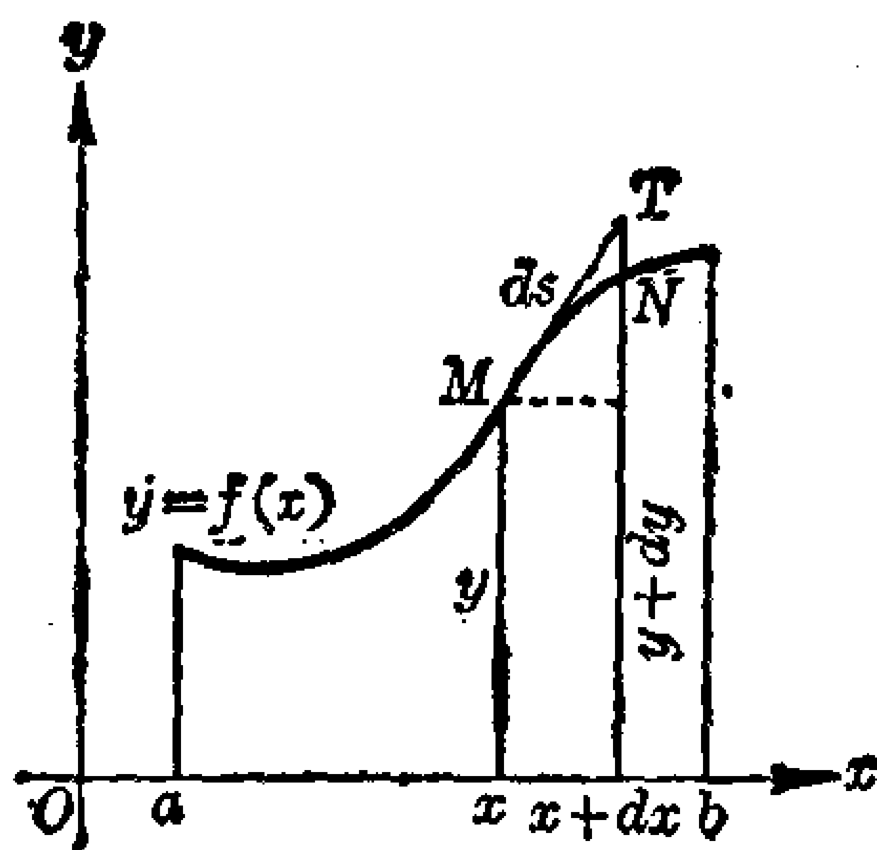


图 4-21

解：我们用微元法来推导侧面积公式.

第一步　分割区间 $[a,b]$，考虑任意一份 $[x,x+dx]$．相应于这一份的，是由小弧段 $\overset{\frown}{MN}$ 绕 x 轴旋转所得到的侧面积 ΔA，它可以用切线段 MT(长度为 ds)绕 x 轴旋转所得到的圆台的侧面积 dA 来近似代替．这个圆台的上、下底半径是 y 和 $y+dy$，斜高是 ds，由中学立体几何公式：

$$\text{圆台侧面积}=\pi(\text{上底半径}+\text{下底半径})\cdot\text{斜高},$$

得到 $$dA=\pi[y+(y+dy)]\cdot ds=2\pi yds+\pi dy\cdot ds,$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$dy\cdot ds$ 是高阶无穷小，因此可以略去，得到

$$dA=2\pi yds.$$

第二步　将上式从 a 到 b 无限求和，得到

$$A=\int_{(a)}^{(b)}2\pi y ds=2\pi\int_{(a)}^{(b)}y ds=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (12)$$

当曲线段参数方程由

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，则侧面积公式为

$$A=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt. \qquad (13)$$

当曲线段由极坐标方程

$$r=r(\theta) \qquad (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

给出，则可选 θ 作为参数，由公式(13)得到

$$A=2\pi\int_\alpha^\beta [r(\theta)\cdot\sin\theta]\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\,d\theta. \qquad (14)$$

【例 14】 求半径为 R 的球面面积 A(图 4-22).

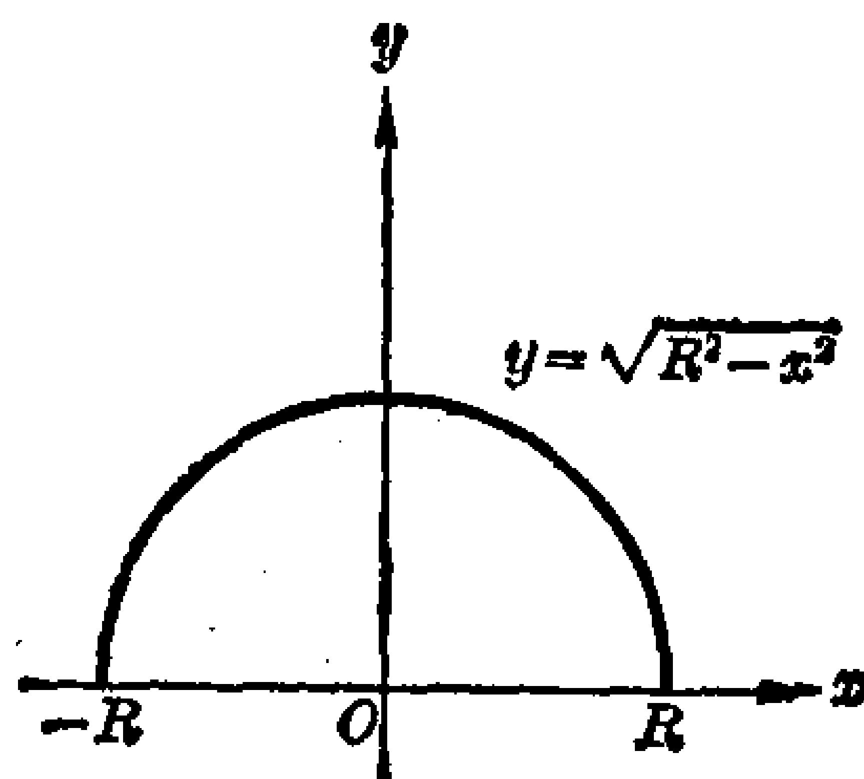


图 4-22

解：这个球面可以看成是由半圆周

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

绕 x 轴旋转而成的. 将 y 及

$$y'=(\sqrt{R^2-x^2})'=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

代入公式(12)，得到

$$A=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}R\,dx=4\pi R^2.$$

这个题也可以利用参数方程来作.

半圆的参数方程是

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

于是

$$x'(t) = -R\sin t,$$

$$y'(t) = R\cos t,$$

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{R^2} = R.$$

由公式(13),得到

$$A = 2\pi\int_0^{\pi} R\sin t \cdot R dt = 2\pi R^2(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2.$$

如果我们采用极坐标系,则半圆的方程为

$$r = R \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

于是

$$r' = 0,$$

$$\sqrt{r'^2 + r^2} = \sqrt{R^2} = R.$$

由公式(14),得到

$$A = 2\pi\int_0^{\pi}(R\sin\theta)\cdot R d\theta = 4\pi R^2.$$

【例 15】 求心脏线

$$r = a(1+\cos\theta) \quad (a > 0)$$

绕极轴旋转所成旋转体的侧面积 A(图 4-23).

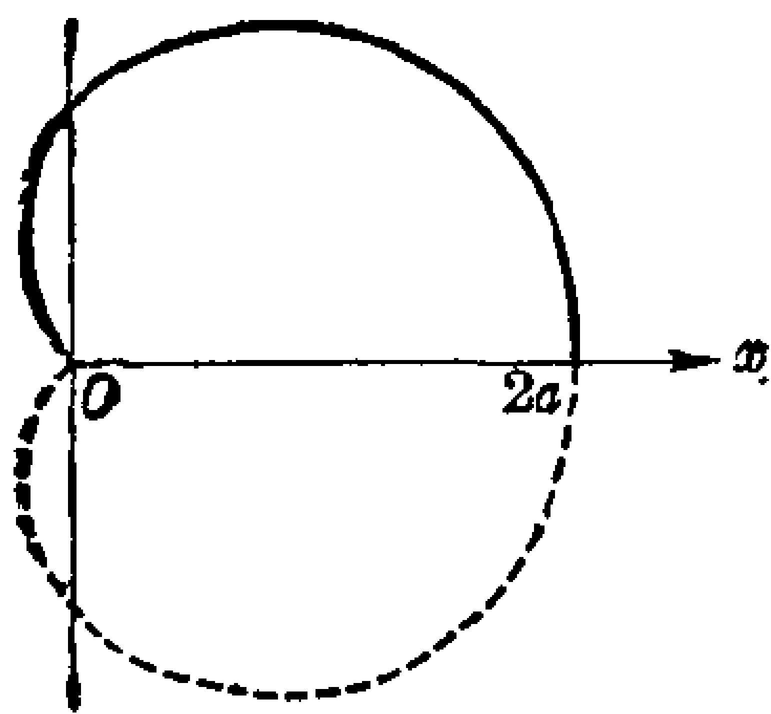


图 4-23

解: $r'(\theta) = -a\sin\theta$,

$$\sqrt{r'^2 + r^2} = \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2} = a\sqrt{2(1+\cos\theta)} = a\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|.$$

此处,旋转体可认为是由上半

支心脏线(对应于极角从 0 到 π)绕极轴旋转而成的，从而由公式(14)，得到

$$A=2\pi\int_0^{\pi}[a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta]\cdot 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\pi}2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=-32\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\,d\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

习　题　一

一、求面积

1. 求下列各图中，有斜线部分的面积:

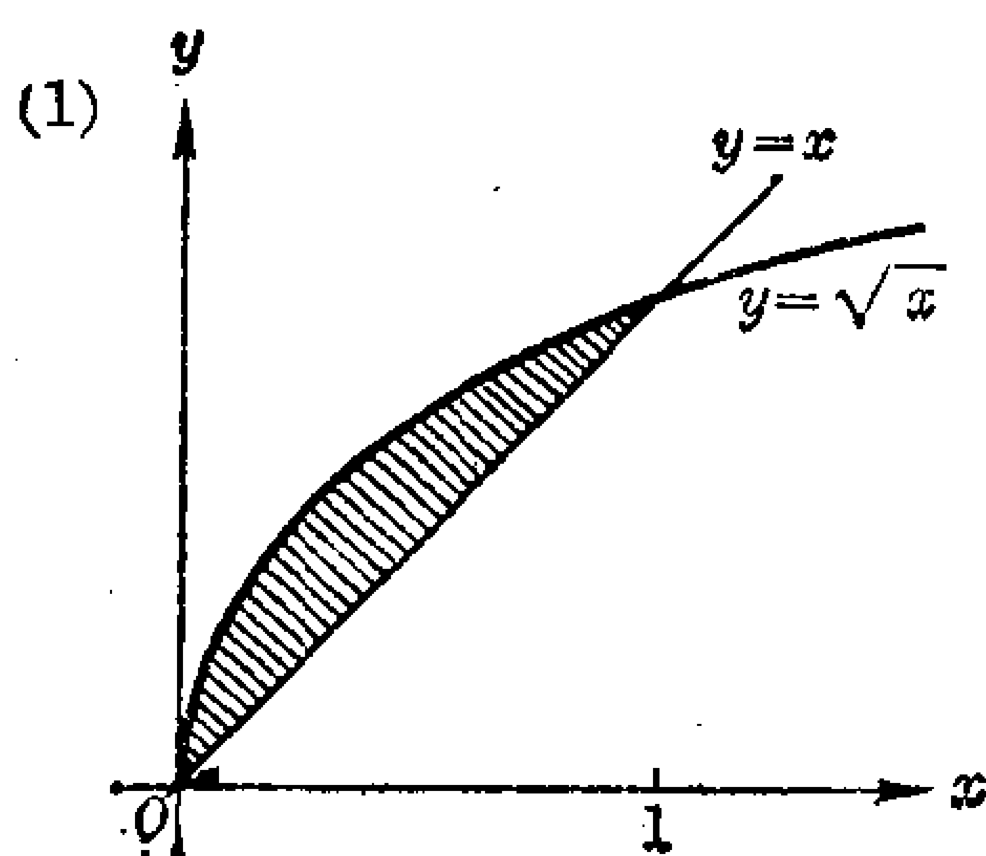


图　4-24

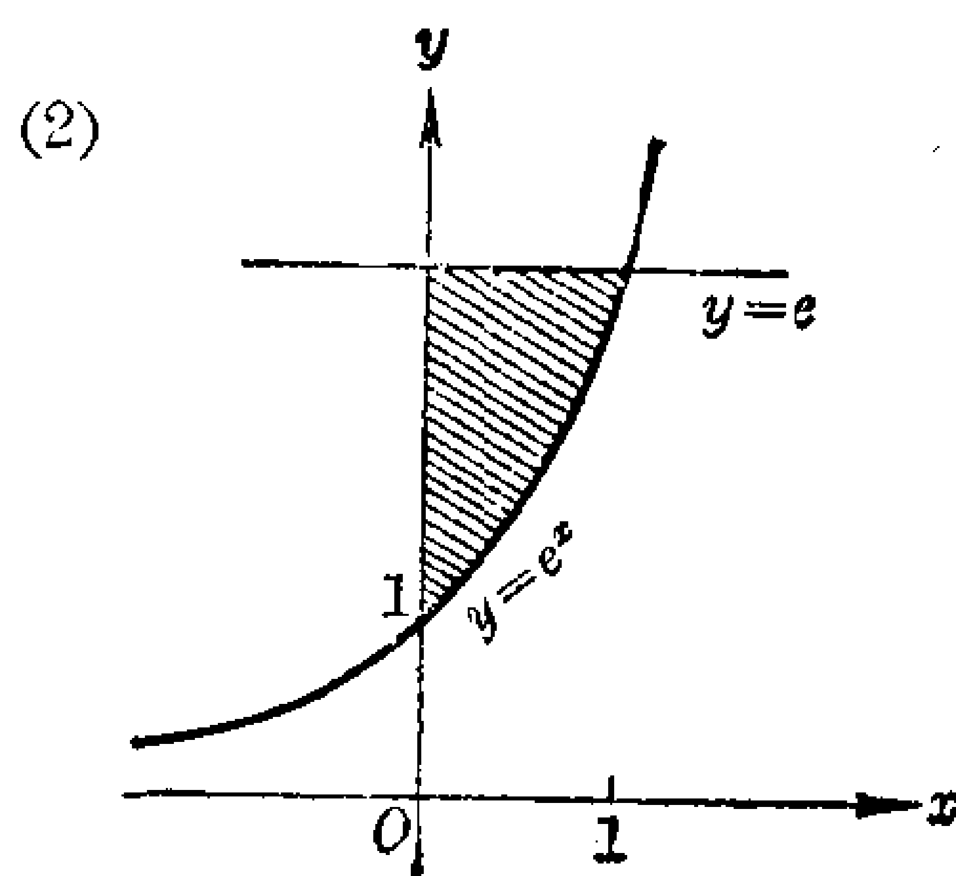


图　4-25

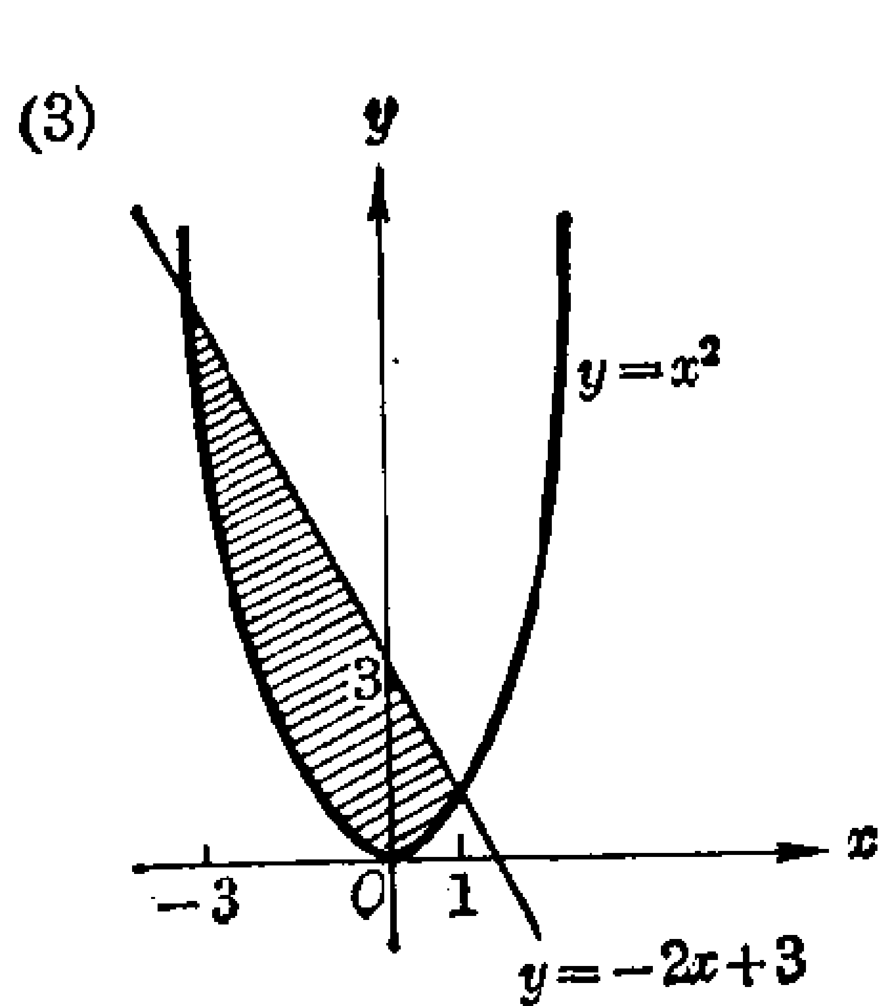


图 4-26

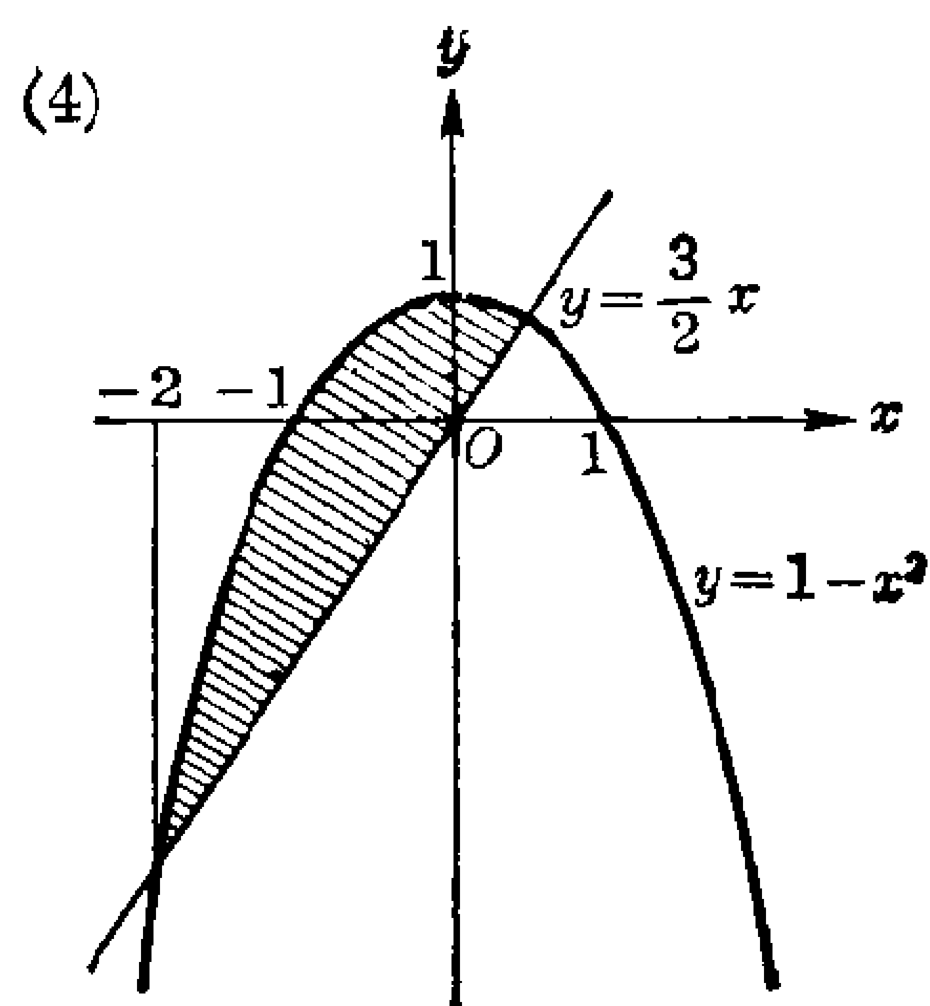


图 4-27

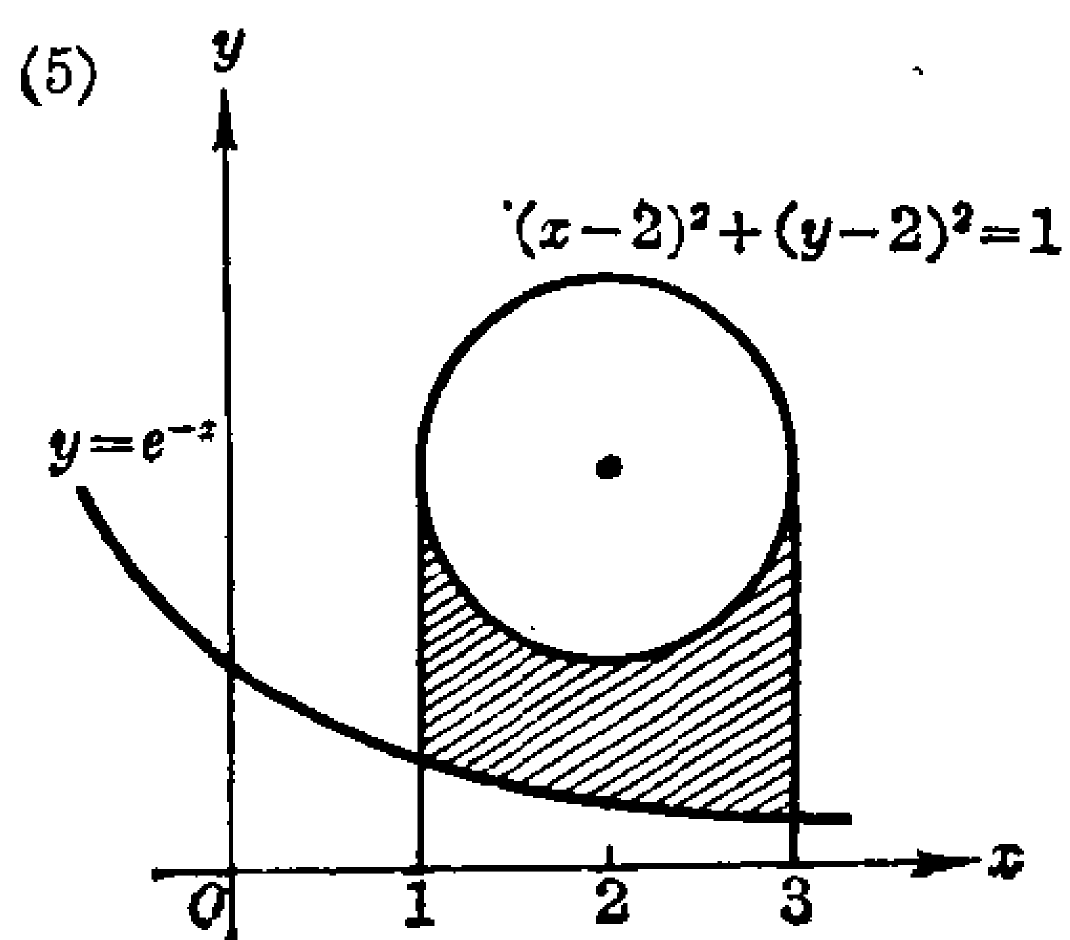


图 4-28

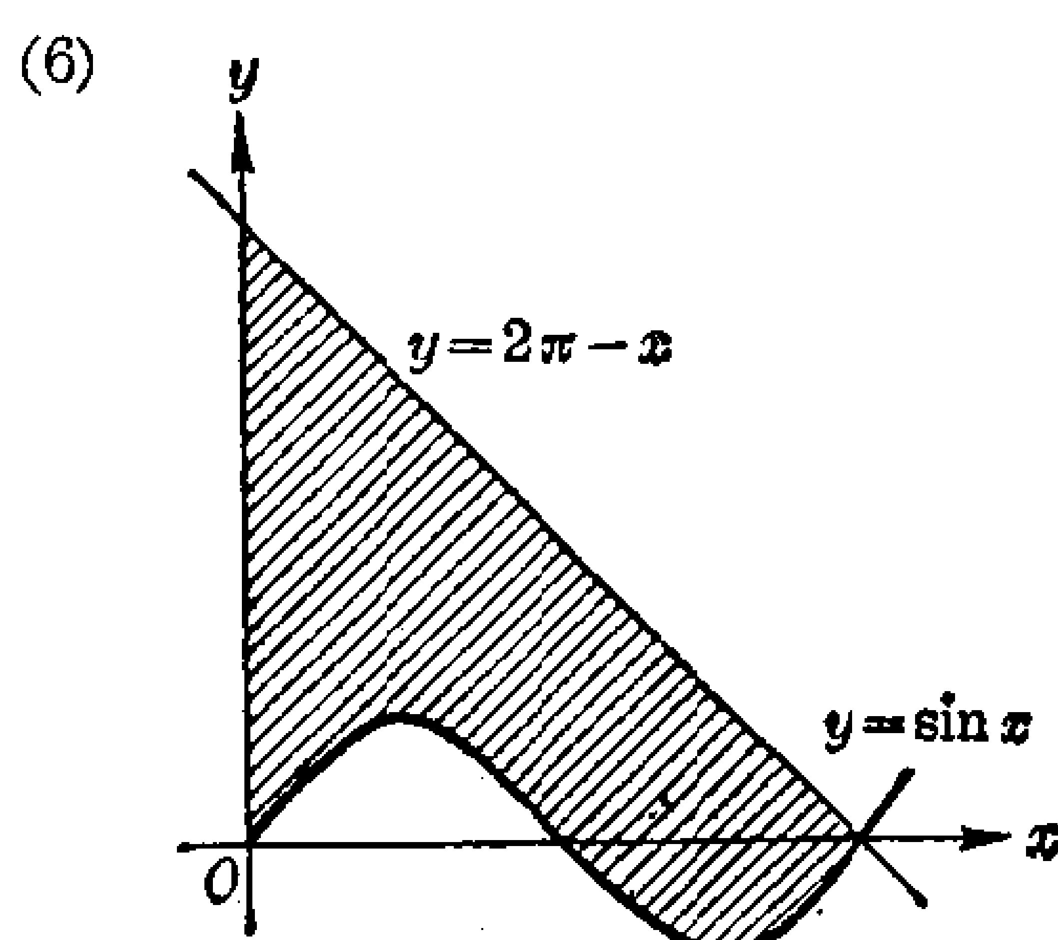


图 4-29

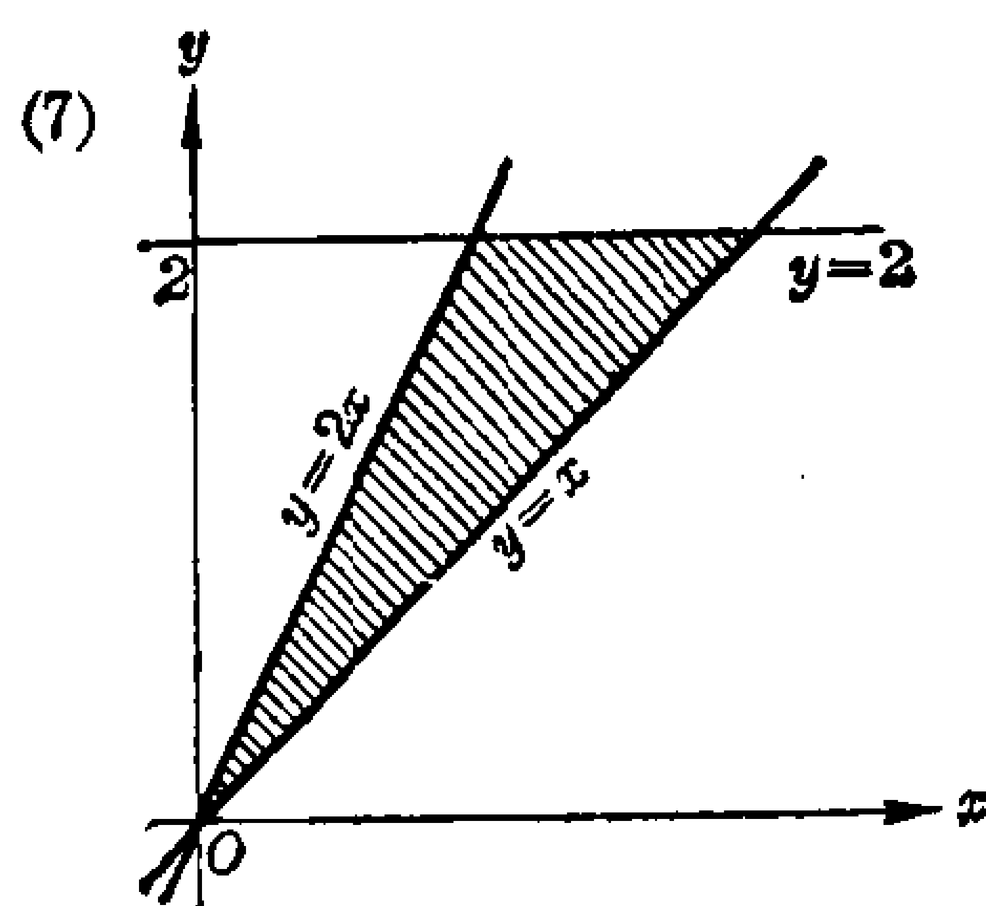


图 4-30

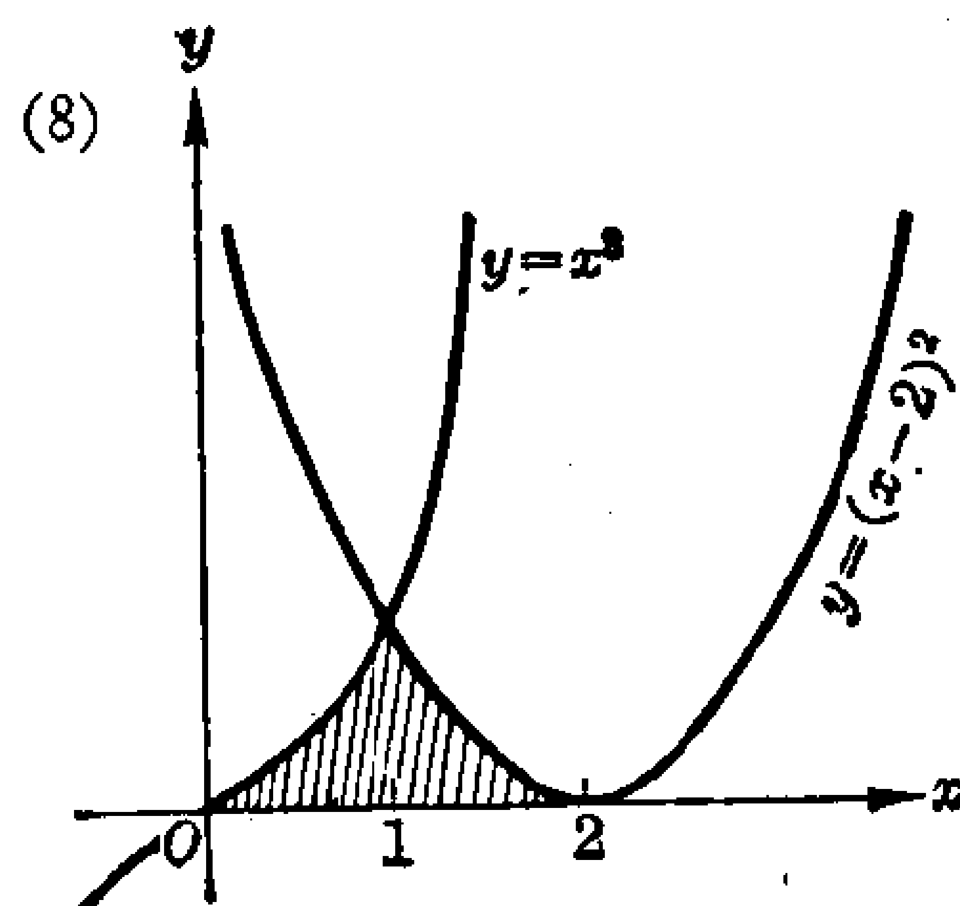


图 4-31

2. 求由下列曲线所围成的面积:

(1) $y=x^2$, $y^2=x$;

(2) $y=2-x^2$, $y=-x$, $y=x$;

(3) $y=\lg x$, $y=0$, $x=0.1$, $x=10$;

(4) $y=x^2$, $y=x$, $y=2x$;

(5) $x^2+y^2=8$, $y=\frac{1}{2}x^2$(两部分都要);

(6) $y=x$, $y=x+\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

3. 求摆线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$的一拱与 x 轴所围成的面积.

4. 求星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 所围成的面积.

5. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$所围成的面积.

6. 求三叶线 $r=a\sin 3\theta$ 所围成的面积.

7. 求圆 $r\leqslant 1$ 被心脏线 $r=1+\cos\theta$ 所分割成的两部分面积.

二、求体积

1. 设有半径为 a 的正圆柱体，被通过其底的直径而与底面交成角 α 的平面所截，得一圆柱楔(图 4-32)，求其体积 V. 并问: 当 $\alpha=45°$ 时，$V=$?

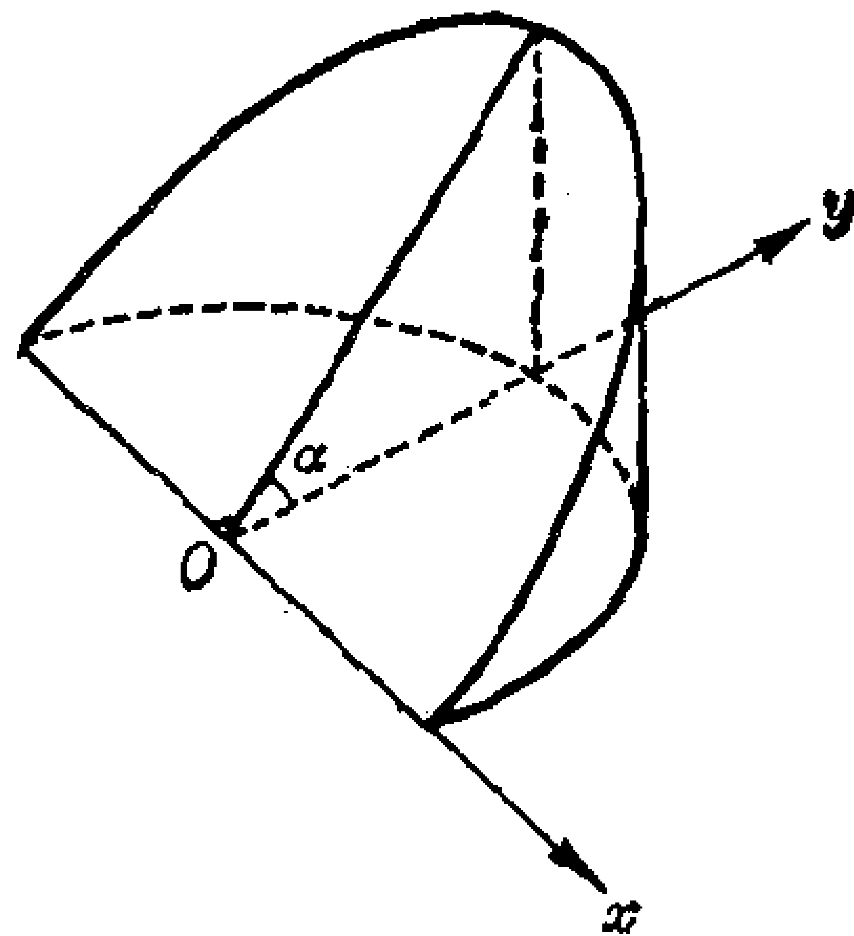


图 4-32

2. 证明椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围椭球体的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi abc$.

3. 求旋转体的体积:

(1) $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 2)$绕 x 轴及 y 轴旋转;

(2) $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\quad(0\leqslant x\leqslant a)$绕 x 轴旋转;

(3) $x^2+(y-5)^2=16$ 绕 x 轴旋转;

(4) $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$绕 x 轴及 y 轴旋转;

(5) 摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$的第一拱绕 x 轴旋转;

(6) 由心脏线 $r=4(1+\cos\theta)$和直线 $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成的图形绕极轴旋转.

4. 利用旋转体体积公式(7)证明:

(1) 高为 h, 底半径为 r 的圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$;

(2) 图 4-33 中球缺的体积为 $V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$.

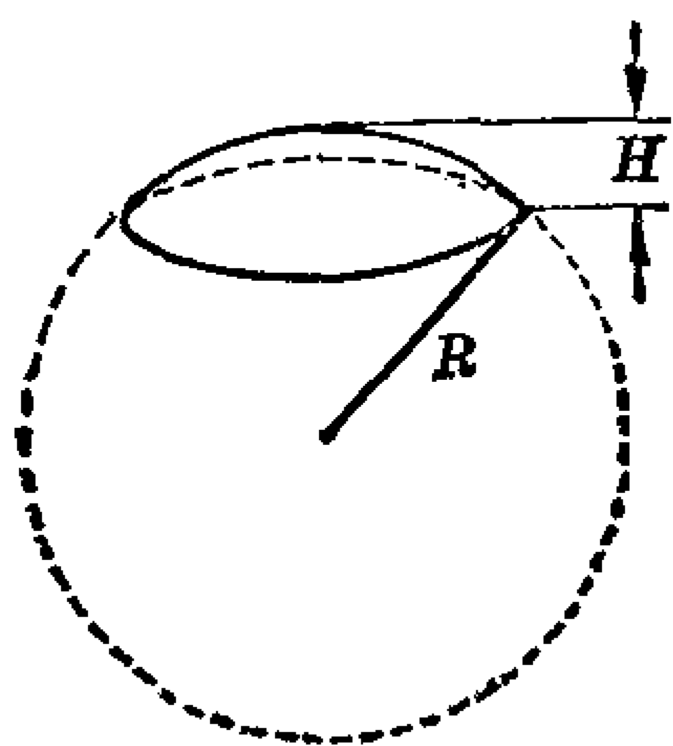


图 4-33

5. 一个油罐全长为 866 厘米, 直径为 200 厘米. 两端都是半个旋转椭球体,中间一段为圆柱体,尺寸如图 4-34. 求油罐的容积 V.

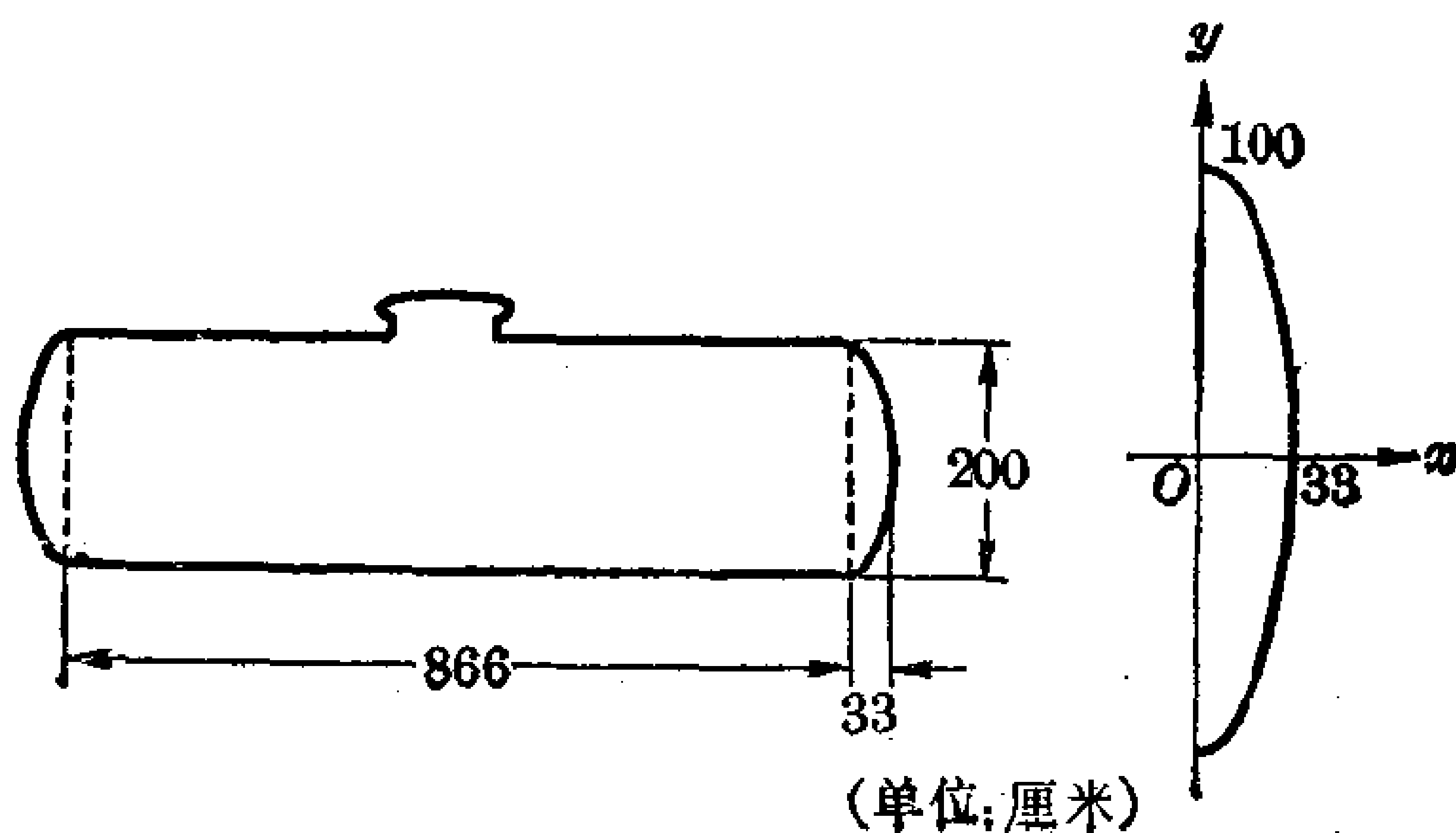


图 4-34

6. 飞机副油箱的中部是圆柱面，尾部是圆锥面，头部是旋转抛物面。设尺寸如图 4-35 所示，求它的体积 V.

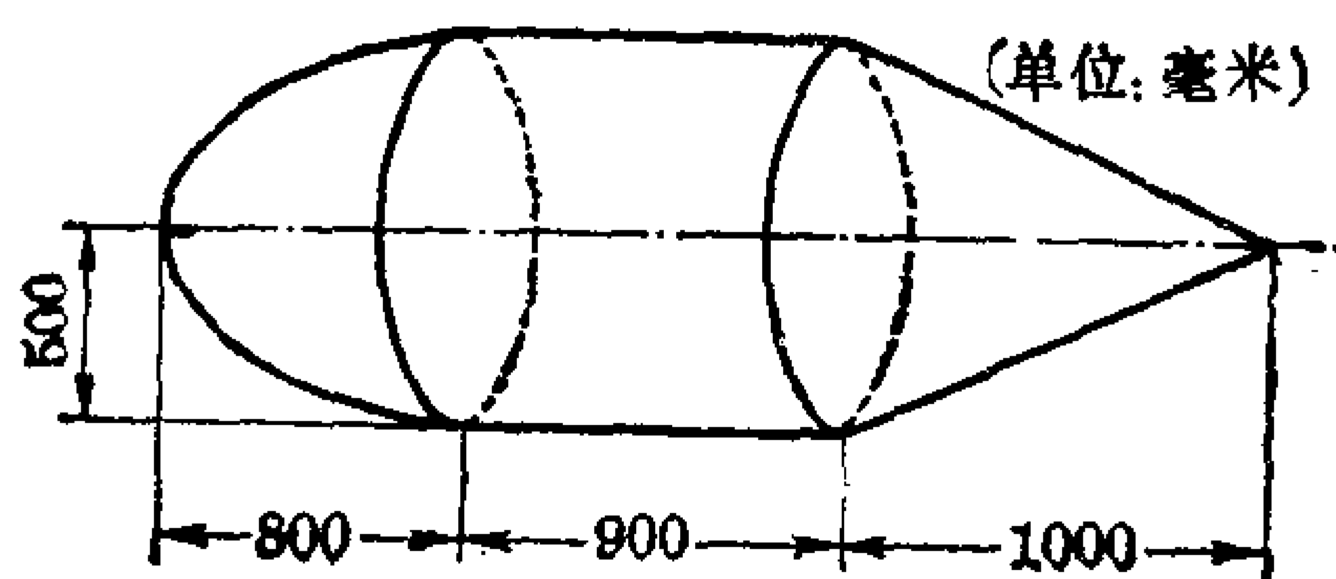


图 4-35

7. 求 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体体积.

8. 求 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 绕 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 旋转所成旋转体体积.

9. 求 $x^2+y^2=a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转所成旋转体体积.

10. 求 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 绕 $y=2a$ 旋转所成旋转体体积.

三、求弧长

1. 在鱼腹梁设计中，需计算抛物线 $y=ax^2$ 在 $x=-b$ 至 $x=b$ 之间的弧长，试计算之.

2. 求 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的一段弧长.

3. 求悬链线 $y=a\,\mathrm{ch}\,x=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 从 $x=-a$ 到 $x=a$ 这一段的弧长.

4. 求星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ 的全长.

5. 求曲线 $x=e^t\sin t, y=e^t\cos t$ 从 $t=0$ 到 $t=1$ 这一段的弧长.

6. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

7. 求阿基米德螺线 $r=a\theta$ 从 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 这一段的弧长.

8. 求对数螺线 $r=ae^{m\theta}$ 从 $r=0$ 到 $r=a$ 这一段的弧长(其中 $m>0$)。

四、求旋转体的侧面积

1. 求 $y=\mathrm{tg}\,x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 绕 x 轴旋转所成旋转体的侧面积.

2. 求 $x^2+(y-b)^2=a^2(b\geqslant a)$ 绕 x 轴旋转所成旋转体的侧面积.

3. 求悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 相应于 $|x|\leqslant b$ 的一段绕 x 轴及 y 轴旋转所成旋转体的侧面积.

4. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$ 绕 x 轴及 y 轴旋转所成旋转体的侧面积.

5. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 x 轴旋转所成旋转体的侧面积.

6. 求 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 绕 x 轴及 y 轴旋转所成旋转体的侧面积.

7. 求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 绕极轴旋转所成旋转体的侧面积.

8. 证明: 高为 H, 底半径为 R 的圆锥的侧面积为 $\pi R\sqrt{R^2+H^2}$.

9. 证明: 球台侧面积为 $2\pi RH$ (图 4-36).

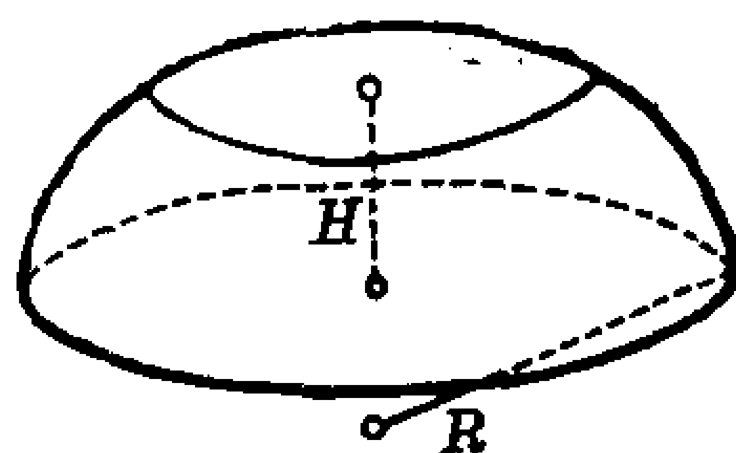


图 4-36

第三节 定积分的物理应用

3.1 已知速度求路程

设一物体作变速直线运动, 其速度为 $V=V(t)$, 则物体在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内所走过的路程为

$$s=\int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt. \tag{1}$$

这是我们在第三章一开始就已熟悉的. 现在我们用微元法把公式(1)再推导一遍.

第一步 分割时间区间 $[t_1, t_2]$, 考虑任意一份 $[t, t+dt]$. 相应于这一段时间的路程 Δs 可用路程微元 ds 来近似代替,

ds 是以 $v(t)$ 为速度的匀速运动的路程，因而

$$ds = v(t) \cdot dt.$$

第二步　当 $\Delta t \to 0$ 时，将 ds 无限相加，即将上式从 t_1 到 t_2 求定积分，就得到路程公式

$$s = \int_{(t_1)}^{(t_2)} ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

这就是公式(1)。

在这里，要求的路程 s 是非均匀变化问题(具体来说，就是变速运动)中的一个整体量，我们通过在局部范围内"以匀代不匀"或"以不变代变"的办法，先写出路程微元，然后求积分，解决了这一问题.

【例 1】　已知自由落体的速度为 $v=gt$，求落体从 $t=0$ 到 $t=t_0$ 所走过的路程 s.

解：由公式(1)，知

$$s = \int_0^{t_0} gt\,dt = \frac{1}{2}\,gt^2\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{2}\,gt_0^2.$$

因此，对于任意时刻 t，落体所走过的路程为

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

这正是大家所熟知的自由落体的运动规律.

3.2　静止液体的压力

设有一薄板(形状如图 4-37 所示)，垂直放在比重为 γ 的液体里. 求液体对薄板的压力 P.

解：取坐标系如图所示，并设薄板的曲边方程为 $y=f(x)$，$f(x)$ 是连续函数.

由物理学知道，在液面下深度为 h 的地方，由液体重量所产生的压强为 $p=\gamma\cdot h$，并且同一点的压强在各个方向都是相

等的. 因此, 如果薄板各点处的深度相等, 那么, 液体对薄板的压力就等于压强乘以面积.

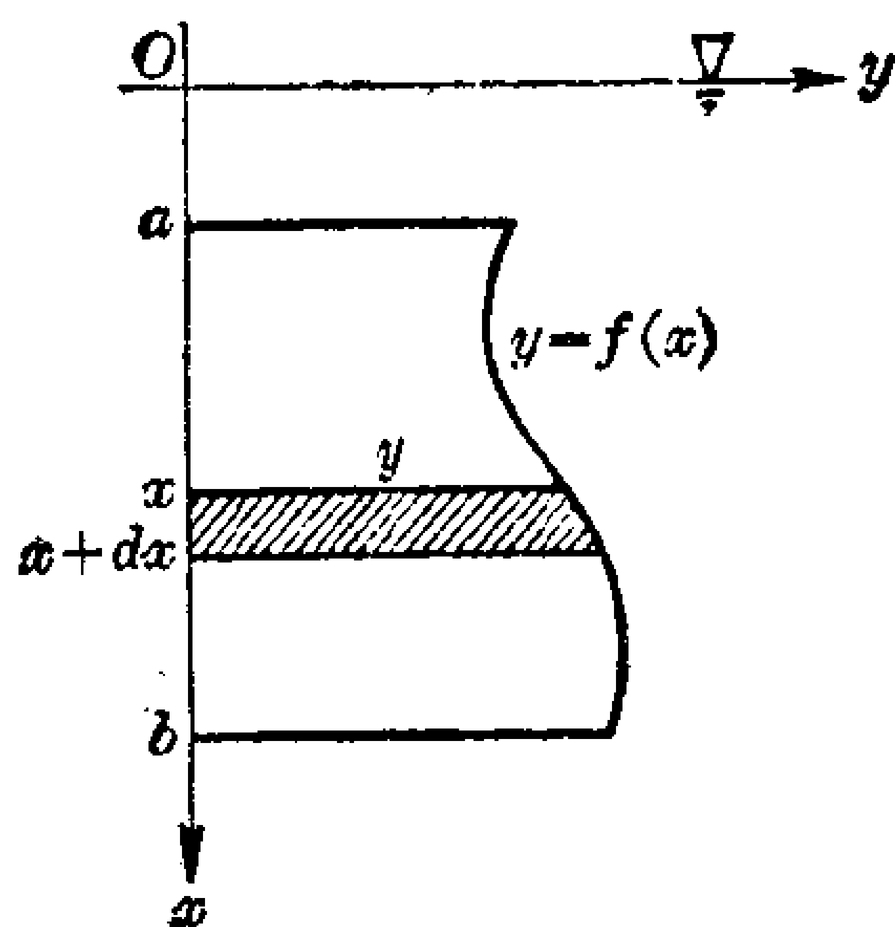


图 4-37

现在,薄板垂直放在液体中,在不同深度处,压强不同,于是,求液体对薄板的压力又是求不均匀变化(此处指深度是变化的)问题中的整体量.为了解决这个问题,我们仍用微元法.

第一步 分割区间$[a, b]$,相应地,薄板被分成若干小横条. 考虑典型小区间$[x, x+dx]$,相应于这一份的,是上沿深度为x,宽为dx的一个小曲边梯形窄条,液体对它的压力ΔP可近似用压力微元dP来代替,dP是深度为x,长为y,宽为dx的小矩形条所受的压力,因此

$$dP=\text{压强}\times\text{面积}=\gamma x\cdot ydx=\gamma xf(x)dx.$$

第二步 将dP从a到b求定积分,即得液体对整个薄板的压力

$$P=\int_{(a)}^{(b)}dP=\int_a^b\gamma xf(x)dx=\gamma\int_a^b xf(x)dx. \qquad (2)$$

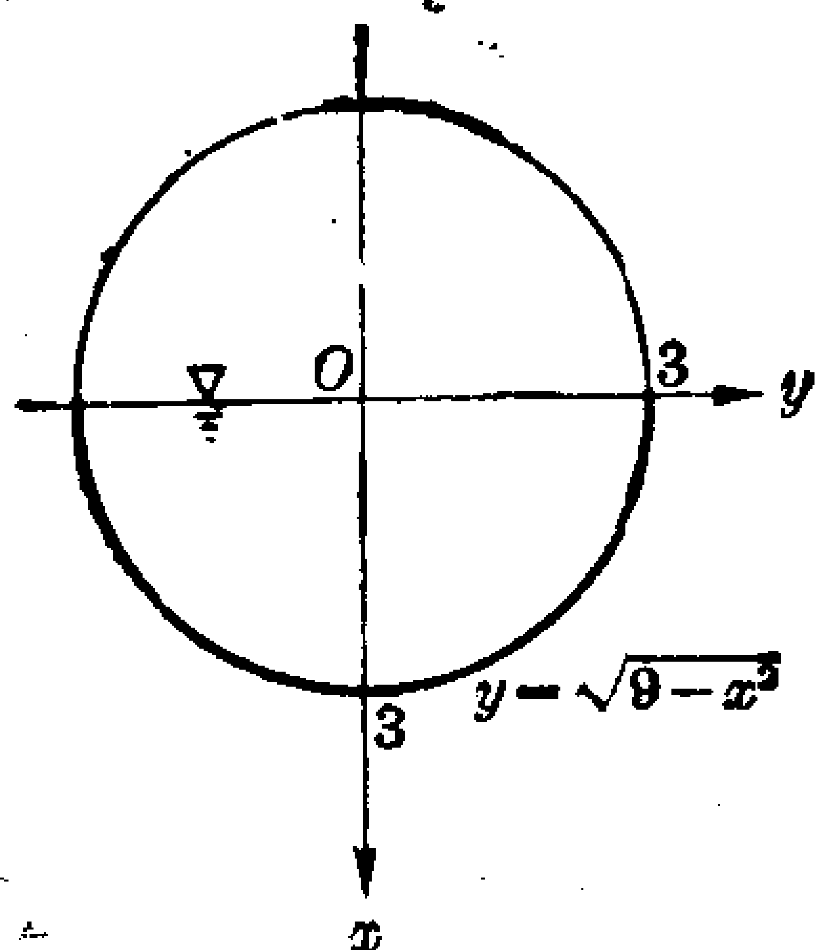


图 4-38

【例 2】 有一个半径为$R=3$米的圆形溢水洞,水半满,求作用在闸门上的压力.

解: 取坐标系如图 4-38 所示. 由公式(2),知只需写出闸门边缘曲线的函数式. 易知在第一象限内,有

$$y=\sqrt{9-x^2}.$$

算出相当于第一象限的半个闸门上

所受的压力 $\frac{P}{2}$，再两倍即可.

对于水来说，比重

$$\gamma=1\ 克/厘米^3=1000\ 千克/米^3=1\ 吨/米^3,$$

由公式(2)，得到

$$\frac{P}{2}=\gamma\int_0^3 x\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx=-\frac{\gamma}{2}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,d(9-x^2)$$

$$=-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_0^3=9\gamma=9(吨),$$

因此 $$P=18(吨).$$

思考题 上题中，若洞内水高一米，则闸门上所受的压力是多少?

【例3】 有一贮油罐，装有比重为0.96吨/米^{3}的油料. 罐的下部有一直径为760毫米的圆孔入口(便于进入检修或清理). 孔的中心距液面6800毫米，孔口挡板用螺钉固紧(图4-39). 已知每个螺钉能承受500公斤的压力，问至少要用多少个螺钉?

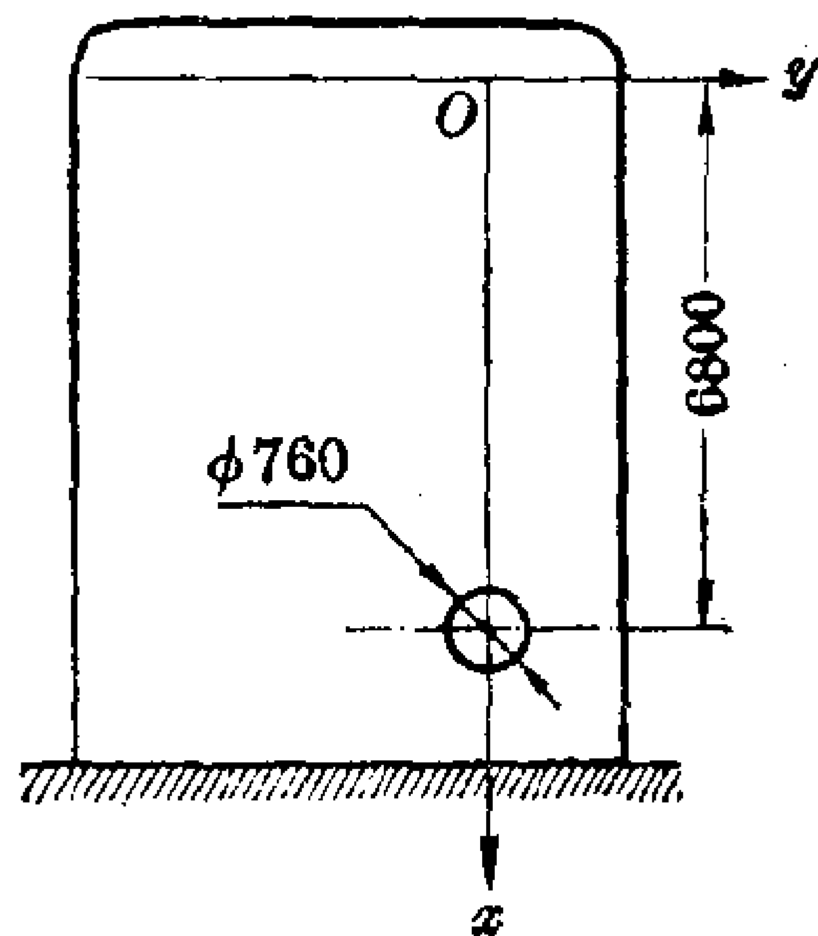


图 4-39

解：圆孔挡板在圆柱面(贮油罐表面)上，不在一个平面上. 但是由于贮油罐直径比圆孔的直径大得多，所以可以把圆孔挡板近似地当作平面情形来处理. 若能计算出挡板上所受的压力，则可知道需多少螺钉. 为了求压力，我们取坐标系如图4-39所示.

记 $h=6800$ 毫米，$r=\frac{760}{2}=380$ 毫米(在计算过程中，先用文字 h, r，最后结果再代入数字，这样，计算可以简洁一些，

也少出错）．圆孔中心的坐标为$(h, 0)$，圆孔半径为r，因此，圆孔边界方程为

$$(x-h)^2+y^2=r^2.$$

图中，右半圆方程为

$$y=\sqrt{r^2-(x-h)^2}.$$

由公式(2)，知油料对右半圆孔挡板的压力为

$$\frac{P}{2}=\gamma\int_{h-r}^{h+r} x\cdot\sqrt{r^2-(x-h)^2}\,dx.$$

令$x-h=t$，则

$$\frac{P}{2}=\gamma\int_{-r}^{r}(t+h)\sqrt{r^2-t^2}\,dt$$

$$=\gamma\int_{-r}^{r}t\sqrt{r^2-t^2}\,dt+\gamma h\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-t^2}\,dt.$$

右端第一个积分的被积函数是奇函数，因而

$$\int_{-r}^{r}t\sqrt{r^2-t^2}\,dt=0.$$

第二个积分的被积函数是偶函数，因而

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-t^2}\,dt=2\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-t^2}\,dt.$$

于是

$$\frac{P}{2}=2\gamma h\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-t^2}\,dt$$

$$\xlongequal{\text{查常用积分表}}2\gamma h\left[\frac{t}{2}\sqrt{r^2-t^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{t}{r}\right]_0^r$$

$$=2\gamma h\cdot\left(\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\gamma h r^2\pi}{2},$$

从而

$$P=\gamma h\pi r^2.$$

将$\gamma=0.96$ 吨/米^3=960 公斤/米^3，$h=6800$ 毫米$=6.8$米，$r=380$ 毫米$=0.38$米代入上式，得

$$P\approx 2961\text{ 公斤}.$$

由此可知，至少要用 $\frac{2961}{500}\approx 6$ 个螺钉.

3.3 变力所做的功

由物理学知道，如果某物体在恒力 F 的作用下作直线运动，力的大小不变，方向与物体的运动方向一致，那么，当物体移动一段距离 s 时，力 F 对物体所做的功是

$$W=F\cdot s.$$

但是，在许多实际问题中，往往出现变力，要求变力对物体所做的功.

当变力的方向不变，只是大小改变时，可以用定积分方法求变力所做的功. 如果变力的大小、方向都改变，那么，求变力所做的功时，就要用曲线积分的工具了. 我们这里只介绍第一种情形. 对后者，将在《多元函数微积分》一书中介绍.

假设物体在变力 F 的作用下沿直线 Ox 运动，力的方向始终不变，沿着 Ox 轴（因此称为"平行力"），而大小在不同点处取不同数值，即力的大小是 x 的函数：

$$F=F(x).$$

今物体在变力 $F(x)$ 的作用下，从直线 Ox 上的一点 a 运动到另一点 b，试求变力对物体所做的功.

解：我们在这里又遇到了一个非均匀变化（指力的大小是变化的，不是恒力）的问题，要求的功也是一个整体量. 因此，我们仍用微元法来处理.

第一步　分割区间 $[a, b]$，考虑典型小区间 $[x, x+dx]$. 在这一小段上，变力所做的功 ΔW 可用功的微元（也称为元功）dW 来近似代替. dW 是恒力 $F(x)$ 在小段距离 dx 上所做的功，即

$$dW = F(x)\,dx.$$

第二步　将 dW 从 a 到 b 求定积分，就得到所求的功

$$W = \int_{(a)}^{(b)} dW = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{3}$$

这就是说，变力所做的功等于变力沿距离区间的定积分．因此，求功时，只需设法写出变力函数 $F(x)$，再求定积分就行了．

【例 4】　设有一弹簧，原长 1 米．一端固定，压缩另一端．假定每压缩 1 厘米需要 5 克重的力，今将弹簧从 80 厘米压缩为 60 厘米，问需做功多少？

解：取坐标系如图 4-40 所示，弹簧自由端的平衡位置（即初始位置）取为坐标原点．



图　4-40

今将弹簧从 80 厘米压缩为 60 厘米，在坐标轴上，相当于将自由端从坐标为 $100-80=20$（厘米）的点 A 处压缩到坐标为 $100-60=40$（厘米）的点 B 处（图 4-41）．

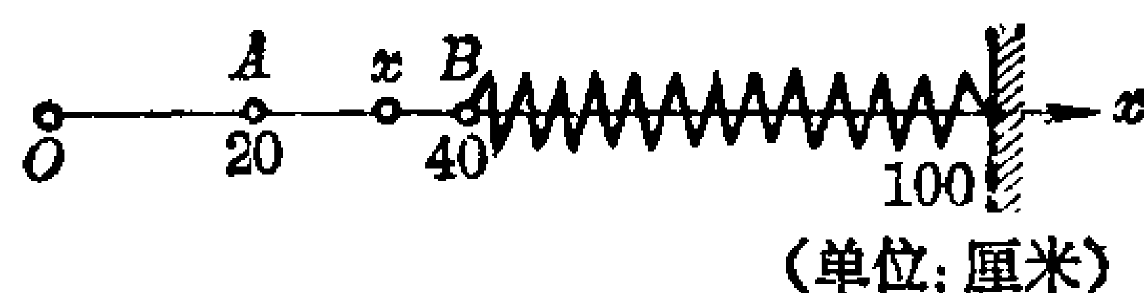


图　4-41

为了求出外力所做的功，由公式(3)知，只须写出在区间 [20, 40] 上任一点 x 处的外力 $F(x)$．由物理学知道，在弹性限度内，拉伸（或压缩）弹簧所需的力与伸长量（或压缩量）成

正比．现在，把弹簧压缩到 x 处，压缩量为 x，因此所需的外力为

$$F=kx \quad (k>0 \text{ 为比例常数}).$$

这里的 k 可以由已知条件确定出来：已知每压缩 1 厘米需力 5 克重，代入上式，得到

$$5=k\cdot 1=k,$$

即 $\qquad k=5$（克重/厘米），

从而变力为 $\qquad F=5x$（克重）．

由公式(3)，知所求的功为

$$W=\int_{20}^{40}Fdx=5\int_{20}^{40}xdx$$

$$=\frac{5}{2}x^2\Big|_{20}^{40}=3000 \text{（克重·厘米）}.$$

【例 5】 自地面垂直向上发射火箭，火箭质量为 m．试计算将火箭发射到距离地面的高度为 h 时所做的功，并由此计算第二宇宙速度（指火箭脱离地球引力范围所具有的初速度）．

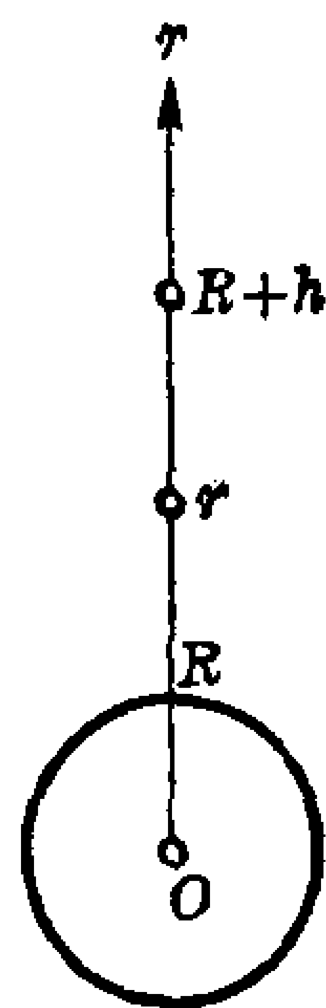


图 4-42

解：取坐标系如图 4-42 所示．设地球质量为 M，半径为 R．

由公式(3)知，只须写出在区间 $[R, R+h]$ 的任一点 r 处，所需施加的外力 $F(r)$．

由实验知，地球对位于 r 点的火箭的引力大小为

$$f=G\frac{M\cdot m}{r^2},$$

其中 r 是火箭到地球中心 O 的距离．G 为引力常数．

为了发射火箭，必须克服地球的引力 f．用以克服地球引力的外力 $F(r)$ 与地球引力大小相等，因此，

$$F(r)=G\frac{M\cdot m}{r^2}.$$

由公式(3)知，将火箭自地面(此时 $r=R$)发射到离地面高度为 h(此时 $r=R+h$)时，所要做的功为

$$W_1=\int_R^{R+h}Fdr=\int_R^{R+h}G\frac{M\cdot m}{r^2}dr$$
$$=GM\cdot m\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^{R+h}=GM\cdot m\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right).$$

式中的引力常数 G 可以变换一下形式:

当火箭在地面上时，$r=R$，这时地球对火箭的引力大小是

$$f=G\frac{M\cdot m}{R^2},$$

它应该等于重力 mg，即

$$G\frac{M\cdot m}{R^2}=mg,$$

于是
$$G=\frac{R^2g}{M}.$$

代入上面功的表达式，得到

$$W_1=GM\cdot m\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$
$$=\frac{R^2g}{M}M\cdot m\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$
$$=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right).$$

这就是将火箭自地面发射到离地面高度为h处时所需做的功.

为了使火箭脱离地球引力范围，也就是把火箭发射到无穷远处，此时 $h\to+\infty$，所需做的功为

$$W_2=\lim_{h\to+\infty}W_1=\lim_{h\to+\infty}mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$
$$=mgR^2\cdot\frac{1}{R}=mgR.$$

由能量守恒定律，所做的功 W_2 应等于给于火箭的动能 $\frac{1}{2}mv_0^2$（v_0 是火箭离开地面的初速度），即

$$mgR=\frac{1}{2}mv_0^2,$$

解出
$$v_0=\sqrt{2gR}.$$

将 $g=9.8$ 米/秒²，$R=6371$ 公里$=6.371\times10^6$ 米代入，得到

$$v_0=\sqrt{2\times9.8\times6.371\times10^6}=11.2\times10^4$$
$$=11.2(\text{公里/秒}).$$

这就是使火箭脱离地球引力范围所至少必须具有的初速度，通常称为第二宇宙速度．

例 4，例 5 都是先写出变力表达式，然后代公式(3)．有时，为了方便，我们也直接用微元法．

【例 6】 有一圆锥形蓄水池，内贮满水．池深 15 米，池口直径 20 米．欲将池内的水全部抽出池外，问需做功多少？

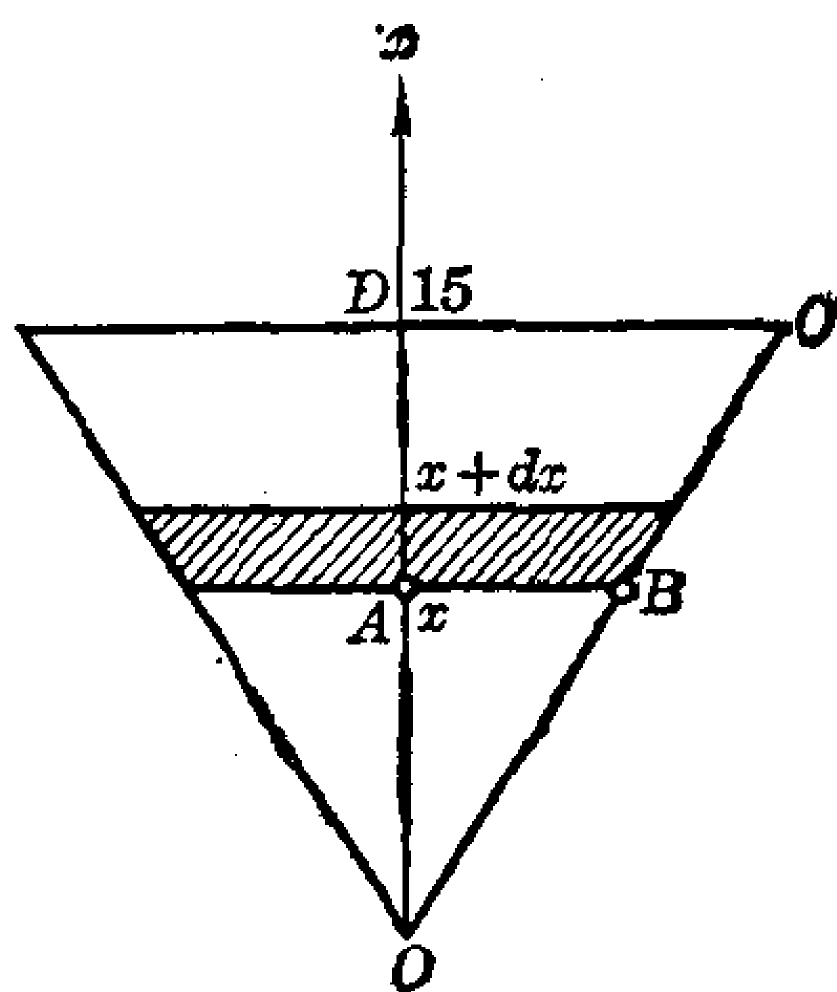


图 4-43

解：我们用微元法解这个问题．取坐标系如图 4-43 所示．

第一步 分割区间[0, 15]，考虑典型小区间$[x, x+dx]$． 相应于这一段的水层重量 ΔF 可以近似看成以 AB 为底半径、以 dx 为高的薄圆柱水层的重量 dF，而水的比重为 $\gamma=1$ 吨/米³，所以

$$dF=\gamma(\pi\overline{AB}^2)\cdot dx=\pi\overline{AB}^2dx.$$

由图 4-43 知，$\triangle OAB\sim\triangle ODC$，因此

$$\frac{OA}{OD}=\frac{AB}{DC}.$$

将 $OA=x$, $OD=15$, $DC=\frac{20}{2}=10$ 代入，得

$$AB=\frac{10}{15}x=\frac{2}{3}x.$$

从而 $$dF=\pi\left(\frac{2}{3}x\right)^2dx=\frac{4}{9}\pi x^2dx.$$

将这层水抽到池外，所提上去的距离是$(15-x)$，因此所需做的功(即元功)为

$$dW=dF\cdot(15-x)=\frac{4}{9}\pi x^2(15-x)dx.$$

第二步　将上式从0到15求定积分，即得所求的功

$$W=\int_0^{15}\frac{4}{9}\pi x^2(15-x)dx$$
$$=\frac{4}{9}\pi\left(\frac{15}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{15}=1875\pi(\text{吨}\cdot\text{米}).$$

3.4 引力问题

万有引力定律告诉我们：任何两个物质的质点都是相互吸引的，引力的方向沿着两质点的联线，引力的大小与两质点质量的乘积成正比，而与它们之间距离的平方成反比．如果用 m_1, m_2 表示两质点的质量，r 表示两质点间的距离，F 表示两质点间相互作用的力，则有

$$F=G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2},$$

$G>0$ 是引力常数．在 C.G.S 制中，G 的值是

$$G=6.67\times10^{-8}\ \text{厘米}^3/\text{克}\cdot\text{秒}^2(\text{达因}\cdot\text{厘米}^2/\text{克}^2).$$

对于一个物体和一个质点，或者两个物体来说，如果它们之间的距离非常远，或者它们之间的距离比它们本身的直径大得多，那么就可以把它们都近似地看成质点，直接运用上面

的公式来求引力．但是，如果它们之间的距离不太大，那么，一般说来，要求它们之间的引力就要用到重积分了（可参见《多元函数微积分》一书）．只有在比较特殊的情况，才能用定积分的方法来解决．下面，我们举两个例子．

【例 7】 设有一均匀细杆，长为 l，质量为 M．另有一质量为 m 的质点位于细杆所在直线上．质点到杆的近端的距离为 a（图 4-44）．试计算细杆对质点的引力 F．

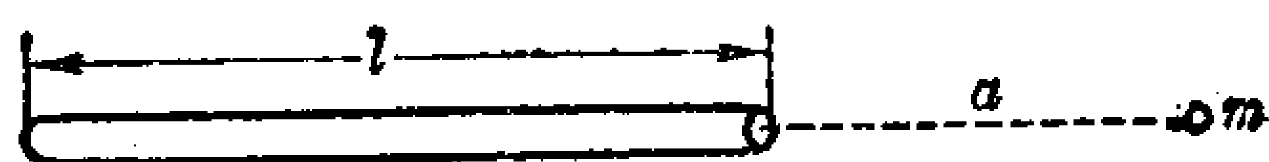


图 4-44

解：上面已经说了：万有引力定律一般只适用于二质点的情形．现在一个是质点 m，另一个是细杆，其上各点到质点 m 的距离都不相同，我们在这里又遇到了一个不均匀变化的问题，并且也是要求一个整体量——整个细杆对质点的引力．为了求得它，我们仍用微元法：把细杆分成若干部分，每一部分近似地看成一个质点，利用万有引力定律算出它们对质点 m 的引力 dF，然后再将 dF 无限相加，得到总引力 F．

应当指出：引力本来是向量，不仅有大小，而且有方向．但此处细杆各点对质点 m 的引力方向都相同（指向细杆），因此只须考虑大小．

解题时，总是先取好坐标系．坐标系的选择不会影响所求量的值，但是直接关系到计算过程的繁简．为了帮助大家练习怎样选取坐标系，我们挑几种选法叙述如下．

第一种．取坐标系如图 4-45 所示．

分割区间 $[0, l]$，考虑任意一份 $[x, x+dx]$．细杆相应于

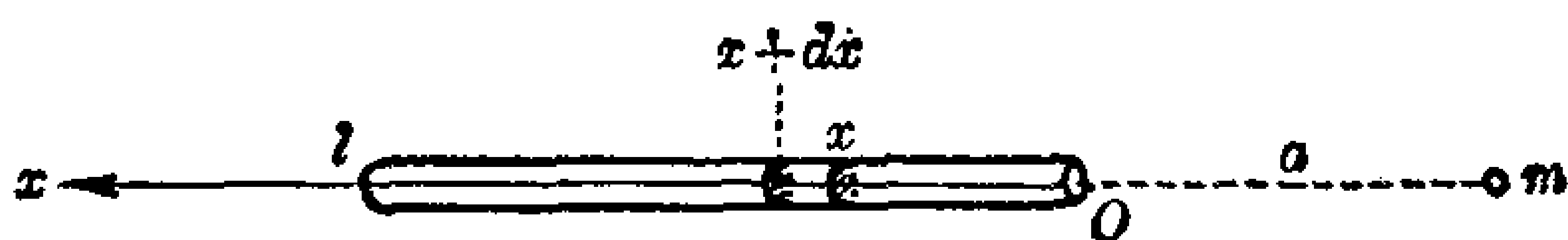


图 4-45

这一部分的是长度为 dx 的细杆，它的质量是 $\frac{M}{l}dx$（$\frac{M}{l}$ 是细杆的线密度）. 我们可以近似地把这一小段看成一个质量为 $\frac{M}{l}dx$ 的质点，它位于点 x 处，与质点 m 的距离是 $x+a$. 于是由万有引力定律，得引力微元

$$dF=G\cdot\frac{\frac{M}{l}\ dx\cdot m}{(x+a)^2}=\frac{GM\cdot m}{l}\cdot\frac{1}{(x+a)^2}dx.$$

将上式从 0 到 l 求定积分，得到引力

$$F=\int_0^l\frac{GM\cdot m}{l}\cdot\frac{1}{(x+a)^2}dx=\frac{GMm}{l}\int_0^l\frac{1}{(x+a)^2}dx$$

$$=\frac{GMm}{l}\left(-\frac{1}{x+a}\right)\Bigg|_0^l=\frac{GMm}{a(l+a)}.$$

第二种. 取坐标系如图 4-46 所示.

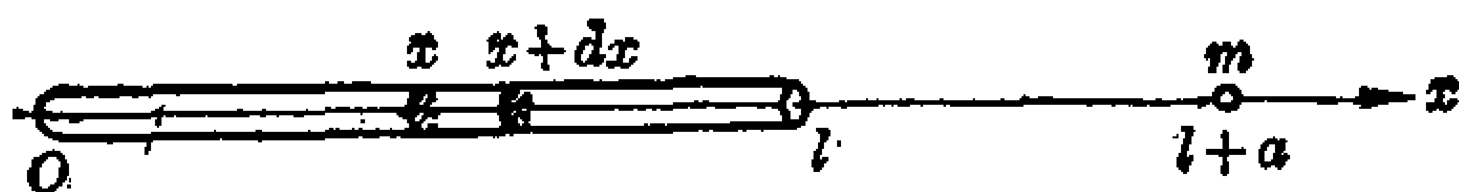


图 4-46

分割区间 $[0, l]$，任取一份 $[x, x+dx]$. 这一小段可近似看成质点，它位于点 x，到质点 m 的距离为 $l+a-x$，因而

$$dF=G\frac{\frac{M}{l}dx\cdot m}{(l+a-x)^2}=\frac{GMm}{l}\cdot\frac{1}{(l+a-x)^2}dx.$$

将上式从 0 到 l 求定积分，即得引力

$$F=\int_0^l \frac{GMm}{l}\cdot\frac{1}{(l+a-x)^2}dx$$

$$=\frac{GMm}{l}\int_0^l \frac{1}{[x-(l+a)]^2}d[x-(l+a)]$$

$$=-\frac{GMm}{l}\cdot\frac{1}{x-(l+a)}\Big|_0^l$$

$$=\frac{GMm}{l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{l+a}\right)=\frac{GMm}{a(l+a)}.$$

第三种. 取坐标系如图 4-47 所示.

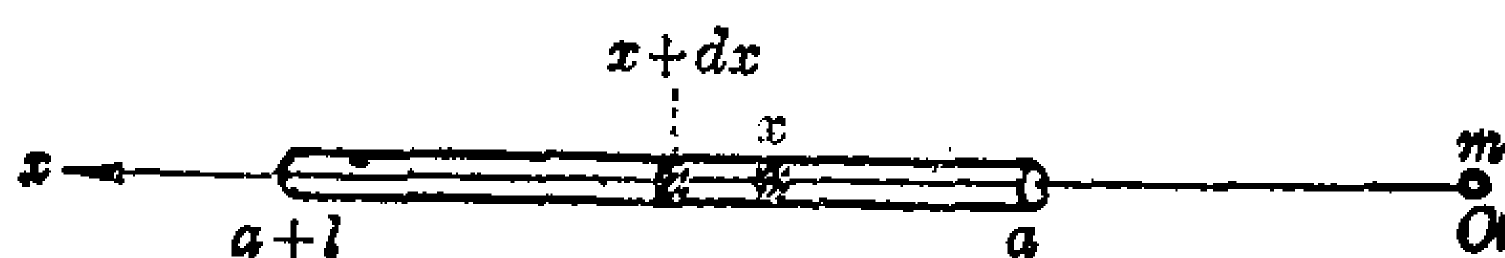


图 4-47

这时，应当分割区间$[a, a+l]$. 小段$[x, x+dx]$上的细杆可近似看成质点，它到质点m的距离为x，因而引力微元为

$$dF=G\frac{\frac{M}{l}dx\cdot m}{x^2}=\frac{GMm}{l}\cdot\frac{1}{x^2}dx.$$

将上式从a到$a+l$求定积分，得到引力

$$F=\int_a^{a+l}\frac{GMm}{l}\cdot\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\frac{GMm}{l}\left(-\frac{1}{x}\right)_a^{a+l}=\frac{GM\cdot m}{a(l+a)}.$$

第四种. 取坐标系如图 4-48 所示.

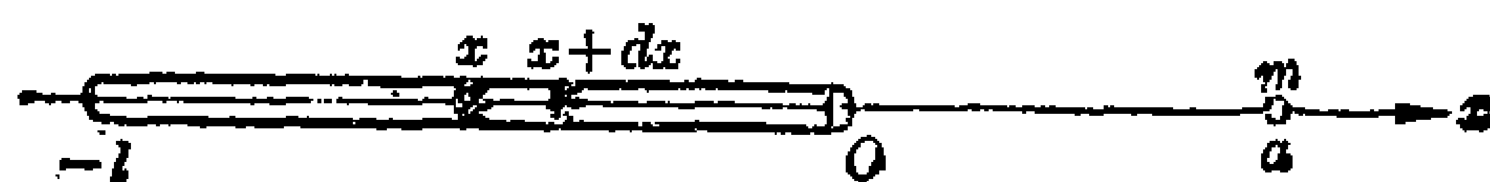


图 4-48

分割细杆所在区间$[-l, 0]$. 小段$[x, x+dx]$上的细杆可近似看成与质点m距离为$(-x+a)$的质点. 于是引力微元是

$$dF = G\frac{\frac{M}{l}dx \cdot m}{(-x+a)^2} = \frac{GMm}{l}\cdot\frac{1}{(a-x)^2}dx.$$

将上式从 $-l$ 到 0 求定积分，即得引力

$$\begin{aligned}F &= \int_{-l}^{0}\frac{GMm}{l}\cdot\frac{1}{(a-x)^2}dx \\ &= \frac{GMm}{l}\int_{-l}^{0}\frac{1}{(x-a)^2}d(x-a) \\ &= -\frac{GMm}{l}\cdot\frac{1}{x-a}\Big|_{-l}^{0} = \frac{GMm}{a(l+a)}.\end{aligned}$$

比较起来，几种选取坐标系的方法都可以，但第三种更为方便，因为此时被积函数简单．第四种虽不复杂，但因这里 $x<0$，所以写距离时应加上负号．这是应当仔细考虑的．

总之，解应用问题时，如何选取坐标系是一个重要的问题，选得好，计算过程简单；选得不好，计算就复杂，甚至可能无法计算．因此，我们必须选取合适的坐标系．

【例 8】 仍是一均匀细杆与一质点 m，细杆长 $2l$，质量为 M．不过这里 m 并不在细杆所在直线上，而是在细杆的垂直平分线上，距杆为 a 处．试求细杆对质点 m 的引力 $\boldsymbol{F}$．

解：取坐标系如图 4-49 所示．

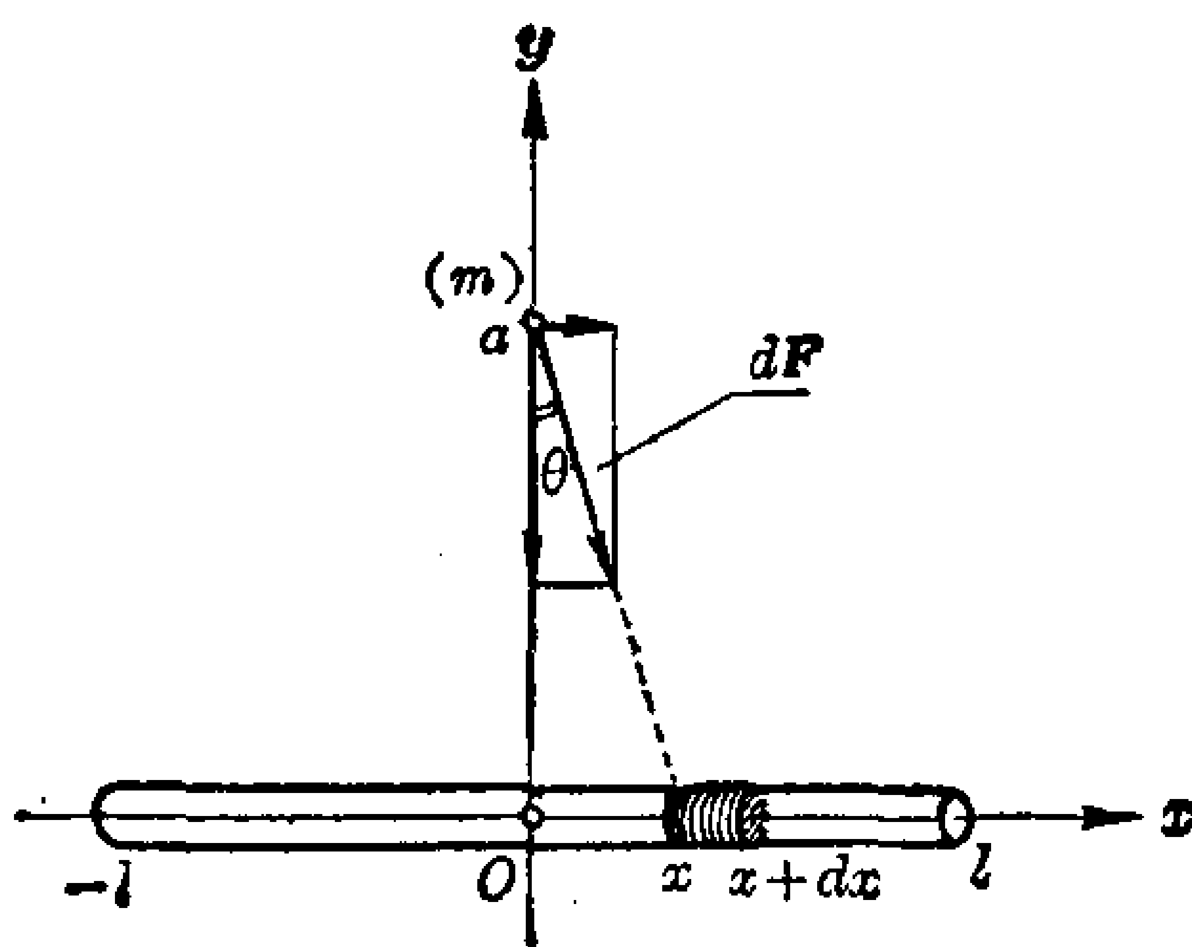


图 4-49

此例与例 7 不同．例 7 中细杆上各段对质点 m 的引力虽然大小不同，方向却都朝着细杆，是相同的，因此可以一段一段加起来，得到总的引力．在那里，实际上只计算了总

引力的大小 F，而方向，由于朝着细杆，就未特别说明.

此处的情形不同：细杆上各段对质点 m 的引力不仅大小不同，而且方向也不同. 例如小段 $[x, x+dx]$ 上的细杆对质点 m 的引力应该朝着该段细杆. 这样，各段引力就不能用上面所说的数字求和方法来相加，而必须用向量加法.

向量怎样相加呢？我们知道，是按分量相加. 举例来说，设有向量 $\boldsymbol{A}=\{A_x, A_y\}$，$\boldsymbol{B}=\{B_x, B_y\}$，则它们的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\{A_x+B_x, A_y+B_y\}$. 根据这个原则，我们把每一小段对质点 m 的引力都分解成 x 分量与 y 分量，然后按分量相加，便得到总引力的 x 分量与 y 分量. 不过，这里的"相加"是无限求和——求定积分.

下面，我们根据向量求和的原则，用微元法来解决求引力 $\boldsymbol{F}$ 的问题.

设总引力为

$$\boldsymbol{F}=\{F_x, F_y\}.$$

由于细杆的质量分布是均匀的，而质点 m 关于细杆的位置对称，因此，总引力的 x 分量 $F_x=0$（细杆左右两端对称的各段，对质点 m 的引力在 x 方向的分量互相抵消），因此，只须求 F_y.

分割区间 $[-l, l]$，任取一小段 $[x, x+dx]$. 这一段上的细杆可近似看成一个质点，其质量为 $\frac{M}{2l}dx$，它到质点 m 的距离是 $\sqrt{x^2+a^2}$. 由万有引力定律，这个质点对质点 m 的引力 $d\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$|d\boldsymbol{F}|=G\frac{\frac{M}{2l}dx\cdot m}{(\sqrt{x^2+a^2})^2}=\frac{GMm}{2l}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}dx.$$

$d\boldsymbol{F}$ 的方向朝着点 x. 从图 4-49 容易看出，$d\boldsymbol{F}$ 的 y 分量为

$$dF_y = -|d\boldsymbol{F}|\cos\theta = -|d\boldsymbol{F}|\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= -\frac{GMma}{2l}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx,$$

式中负号表示 $d\boldsymbol{F}$ 与 y 轴正向的夹角为钝角.

将上式从 $-l$ 到 l 求定积分(即各段引力的 y 分量相加),得到总引力的 y 分量

$$F_y = \int_{-l}^{l} -\frac{GMma}{2l}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx$$

$$= -\frac{GMma}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx$$

$$= -\frac{2GMma}{2l}\int_{0}^{l}\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx$$

$$\xlongequal{\text{查常用积分表}} -\frac{GMma}{l}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\Bigg|_0^l = -\frac{GMm}{a\sqrt{l^2+a^2}}.$$

从而细杆对质点m的总引力为

$$\boldsymbol{F} = \{F_x,\ F_y\} = \left\{0,\ \frac{-GMm}{a\sqrt{l^2+a^2}}\right\}.$$

即细杆对质点m的引力大小为 $\dfrac{GMm}{a\sqrt{l^2+a^2}}$，方向沿细杆的垂直平分线并指向细杆.

3.5 转动惯量问题

转动惯量是一个物理量. 当物体绕固定轴转动时，它反映着惯性的大小,正如物体在移动时,质量反映它惯性的大小一样.

从物理学知道，质量为m的质点，绕固定轴 AB 转动时，质点对 AB 轴的转动惯量为

$$J = mr^2.$$

其中 r 为质点到转轴的垂直距离(图 4-50).

为什么 mr^2 这个量能反映质点 m 在转动时的惯性大小呢?

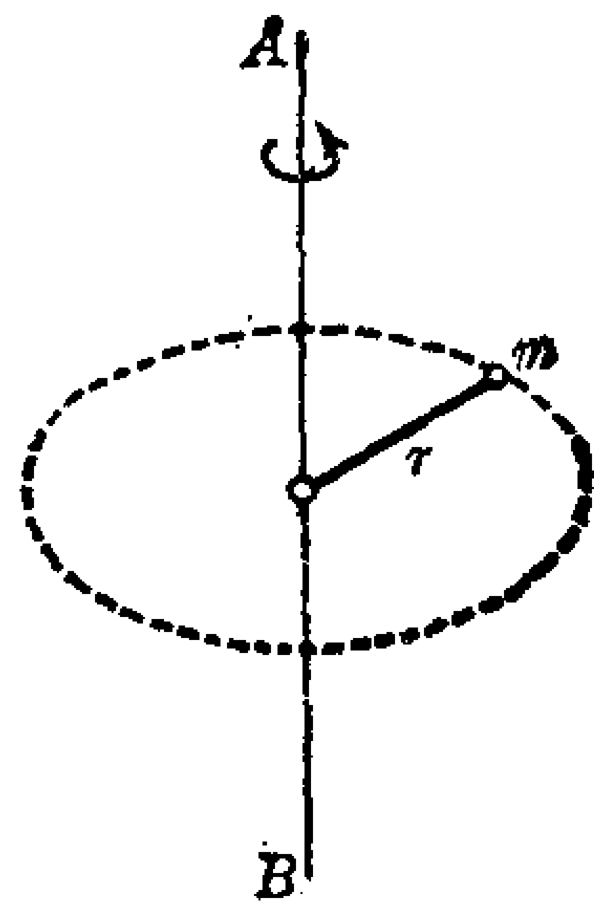


图 4-50

我们知道，如果质点 m 绕 AB 轴转动的角速度是 ω，那么，线速度就是 $v=r\omega$，从而转动动能为

$$u=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(r\omega)^2$$

$$=\frac{1}{2}(mr^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2.$$

当 ω 一定时，u 与 $J(=mr^2)$ 成正比，m 越大，r 越长，转动动能 u 就越大．比如抡大锤时，锤头越重，锤把越长，打击的能量就越大．因此，$J=mr^2$ 这个物理量就刻划了质点 m 绕固定轴 AB 转动时的惯性大小，我们称它为转动惯量．转动惯量是一个标量．

当我们考虑的不是一个质点，而是 n 个质点 m_1, m_2, $\cdots$, m_n 组成的质点组时，它绕 AB 轴的转动惯量 J 等于 n 个质点的转动惯量之和，即

$$J=m_1r_1^2+m_2r_2^2+\cdots+m_nr_n^2=\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2.$$

其中 r_i 是质点 $m_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 到 AB 轴的垂直距离.

在实际问题中，经常遇到质量连续分布的物体绕固定轴转动，这时，怎样求转动惯量呢？一般而言，当物体可以看作是二维的，则需用二重积分或曲面积分；当物体是三维的，则需用三重积分；当物体是一段物质曲线弧，则需用曲线积分(参见本丛书《多元函数微积分》)．但是，当物体的质量均匀分布，并且形状对称时，有时也可将问题化为定积分来解决.

【例 9】 设有一均匀细杆, 长为 l, 质量为 M. 求细杆绕过其中点且与杆垂直的轴 AB 的转动惯量.

解: 取坐标系如图 4-51 所示.

分割区间$\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, 考虑任一小段$[x, x+dx]$. 相应于这一段的细杆可以近似看成一个质点, 其质量为 $\frac{M}{l}dx$, 到AB轴的垂直距离为 x. 因而这个质点对 AB 轴的转动惯量为

$$dJ=\frac{M}{l}dx\cdot x^2=\frac{M}{l}x^2dx.$$

将上式从$-\frac{l}{2}$到$\frac{l}{2}$求定积分, 得到整个细杆的转动惯量

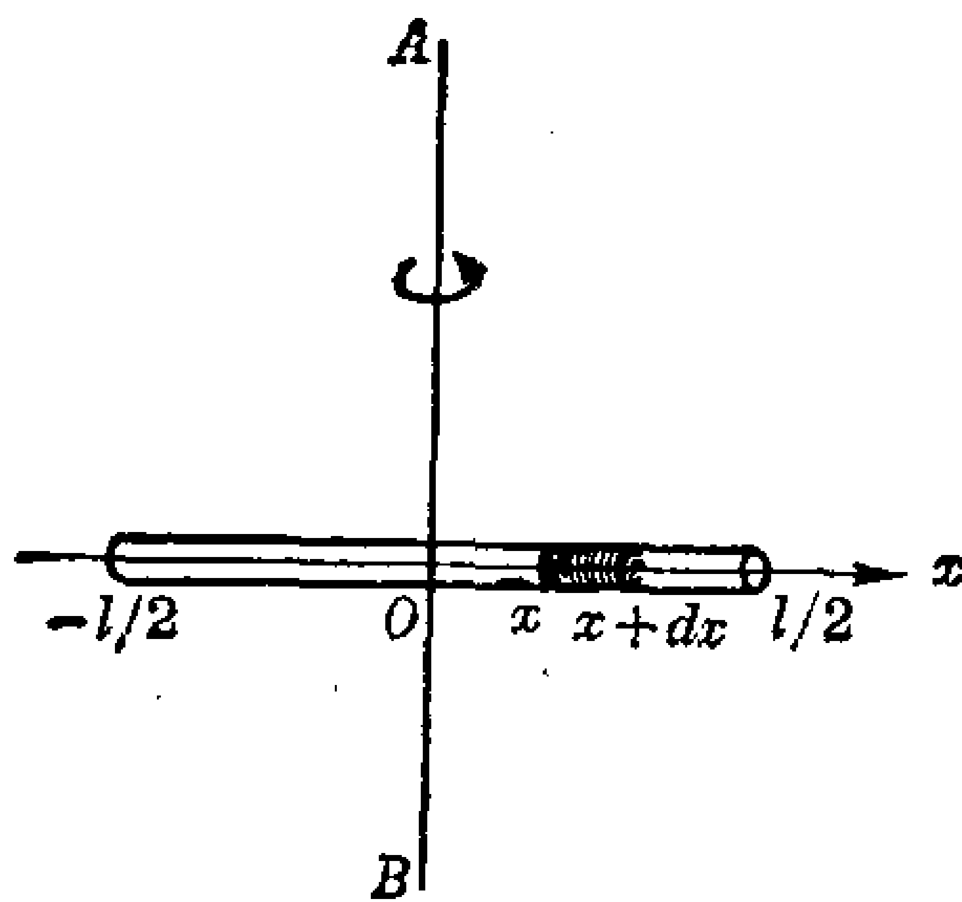


图 4-51

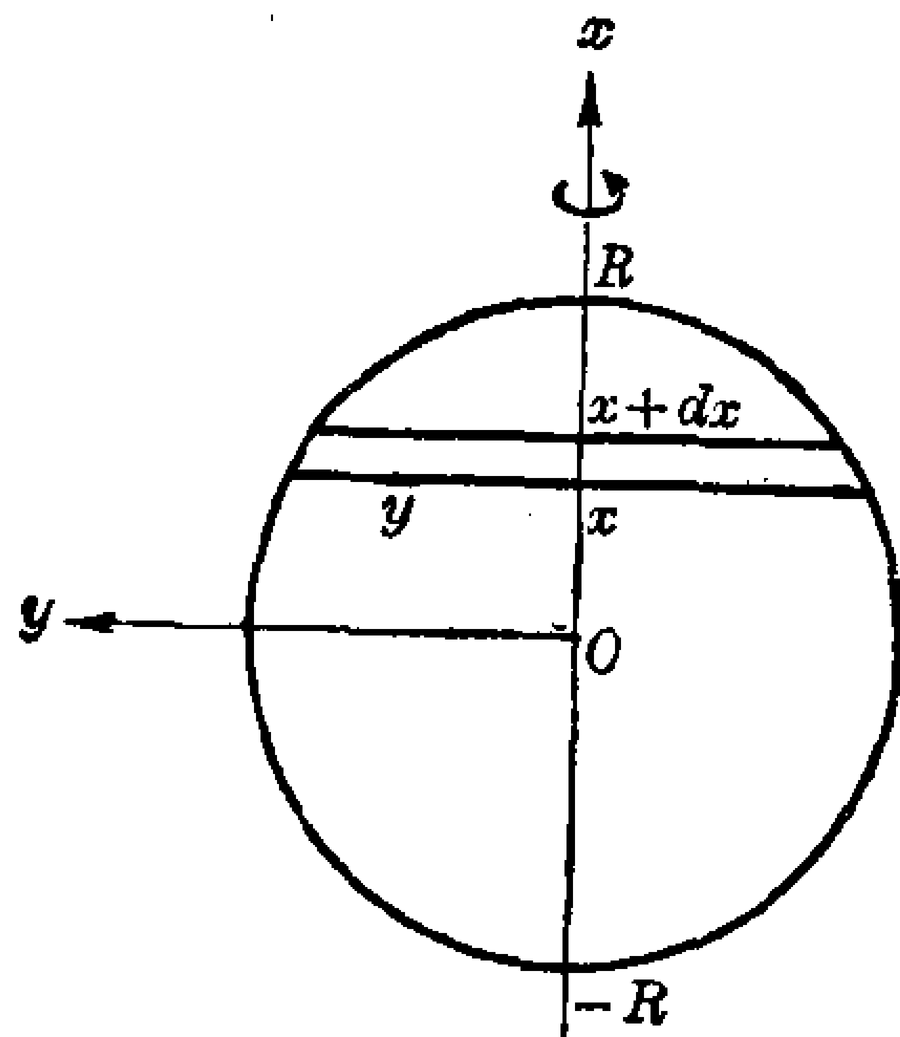


图 4-52

$$J=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{M}{l}x^2dx=2\frac{M}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x^2dx=2\frac{M}{l}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{12}Ml^2.$$

【例 10】 设有一质量为 M, 半径为 R 的均匀薄圆盘, 求绕它的一条直径的转动惯量.

解: 取坐标系如图 4-52 所示. 转动轴取为 x 轴.

分割 x 轴上的区间$[-R, R]$, 圆盘相应地被分成若干平行于 y 轴的窄条. 任取一份$[x, x+dx]$, 相应于它的是一个曲边形窄条, 它可以近似看成一个细杆, 其长度为

$$2y=2\sqrt{R^2-x^2},$$

质量为

$$dm=\text{面密度}\times\text{面积}=\frac{M}{\pi R^2}(2y\cdot dx)=\frac{2M}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}dx.$$

由例 9, 此细杆对 x 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}dJ&=\frac{1}{12}dm\cdot(2y)^2\\&=\frac{1}{12}\cdot\frac{2M}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}\,dx\cdot(2\sqrt{R^2-x^2})^2\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{M}{\pi R^2}(R^2-x^2)^{3/2}dx.\end{aligned}$$

将上式从 $-R$ 到 R 求定积分, 得到整个圆盘对 x 轴的转动惯量

$$\begin{aligned}J&=\int_{-R}^{R}\frac{2}{3}\cdot\frac{M}{\pi R^2}(R^2-x^2)^{3/2}dx\\&=\frac{4}{3}\cdot\frac{M}{\pi R^2}\int_0^R(R^2-x^2)^{3/2}\,dx\\&\xlongequal{\text{令 } x=R\sin t}\frac{4}{3}\cdot\frac{M}{\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^4\cos^4 t dt\\&=\frac{4}{3}\cdot\frac{M}{\pi R^2}\cdot R^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}MR^2.\end{aligned}$$

思考题 在例 9 中, 若 AB 轴过细杆的一端且与杆垂直, 则细杆对 AB 轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}Ml^2$. 请自己推算.

【例 11】 设有一质量为 M, 半径为 R 的圆周状均匀物质, 求它对通过其中心且垂直于圆的转轴 AB 的转动惯量(图 4-53).

解: 分割圆周为若干小弧段. 考虑任意一小段 ΔS. 它可以用 ds 来近似代替. 圆周的线密度是 $\frac{M}{2\pi R}$, 因此, 长为 ds

的小弧段的质量为$dm=\frac{M}{2\pi R}ds$. 把这个小弧段看成质量为dm的质点，它到AB轴的垂直距离为R，因此它绕AB轴的转动惯量为

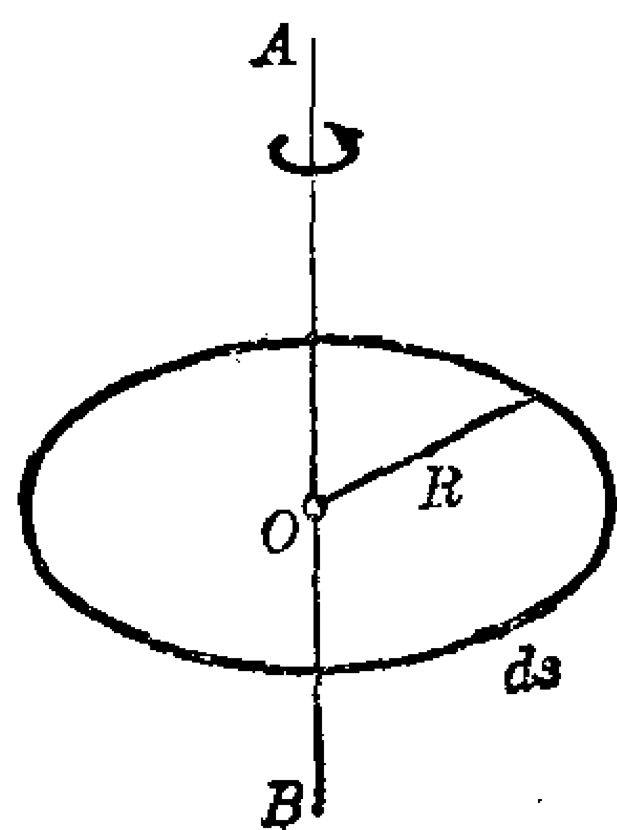


图 4-53

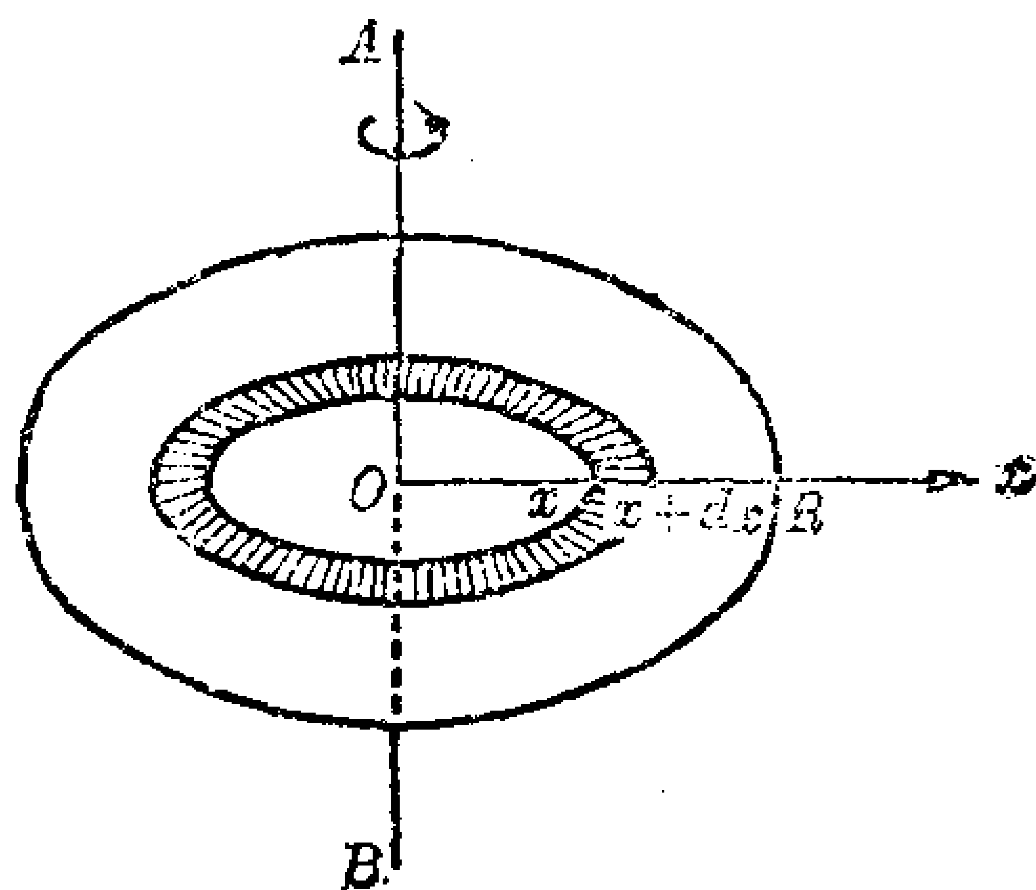


图 4-54

$$dJ=R^2dm=R^2\frac{M}{2\pi R}ds=\frac{MR}{2\pi}ds.$$

将上式沿整个圆周积分，得到

$$J=\int_{(L)}dJ=\int_{(L)}\frac{MR}{2\pi}ds=\frac{MR}{2\pi}\int_{(L)}ds,$$

积分$\int_{(L)}ds$是将各小段弧长沿整个圆周相加，因而是整个圆周长，即$\int_{(L)}ds=2\pi R$，从而

$$J=\frac{MR}{2\pi}\cdot 2\pi R=MR^2.$$

【例 12】 设有一质量为M，半径为R的均匀薄圆盘，求它对通过圆心且与盘面垂直的转轴AB的转动惯量.

解：取坐标系如图 4-54 所示.

分割区间$[0, R]$，相应地把圆盘分成了若干个窄圆环. 考虑任意一份$[x, x+dx]$，相应于它的是一个内半径为x，外半径为$x+dx$的圆环，其面积为

$$\pi(x+dx)^2-\pi x^2=2\pi x dx+\pi(dx)^2\approx 2\pi x dx.$$

圆盘的面密度是 $\frac{M}{\pi R^2}$，因此这个圆环的质量近似为

$$dm=\text{面密度}\times\text{面积}$$
$$=\frac{M}{\pi R^2}\cdot 2\pi x dx=\frac{2M}{R^2}x dx.$$

由于 dx 很小，这个圆环可以近似地看成一个圆周，由例 11 的结果，得到它对 AB 轴的转动惯量

$$dJ=dm\cdot x^2=\frac{2M}{R^2}x dx\cdot x^2=\frac{2M}{R^2}x^3 dx.$$

从而圆盘对 AB 轴的转动惯量为

$$J=\int_0^R\frac{2M}{R^2}x^3 dx=\frac{1}{2}MR^2.$$

【例 13】 设有一质量为 M，半径为 R 的均匀实心球体，求它对其直径的转动惯量.

解：取坐标系如图 4-55 所示. 直径所在旋转轴取为 x 轴，与它垂直的轴取为 y 轴. xOy 平面截球面成一个大圆，其方程为 $x^2+y^2=R^2$.

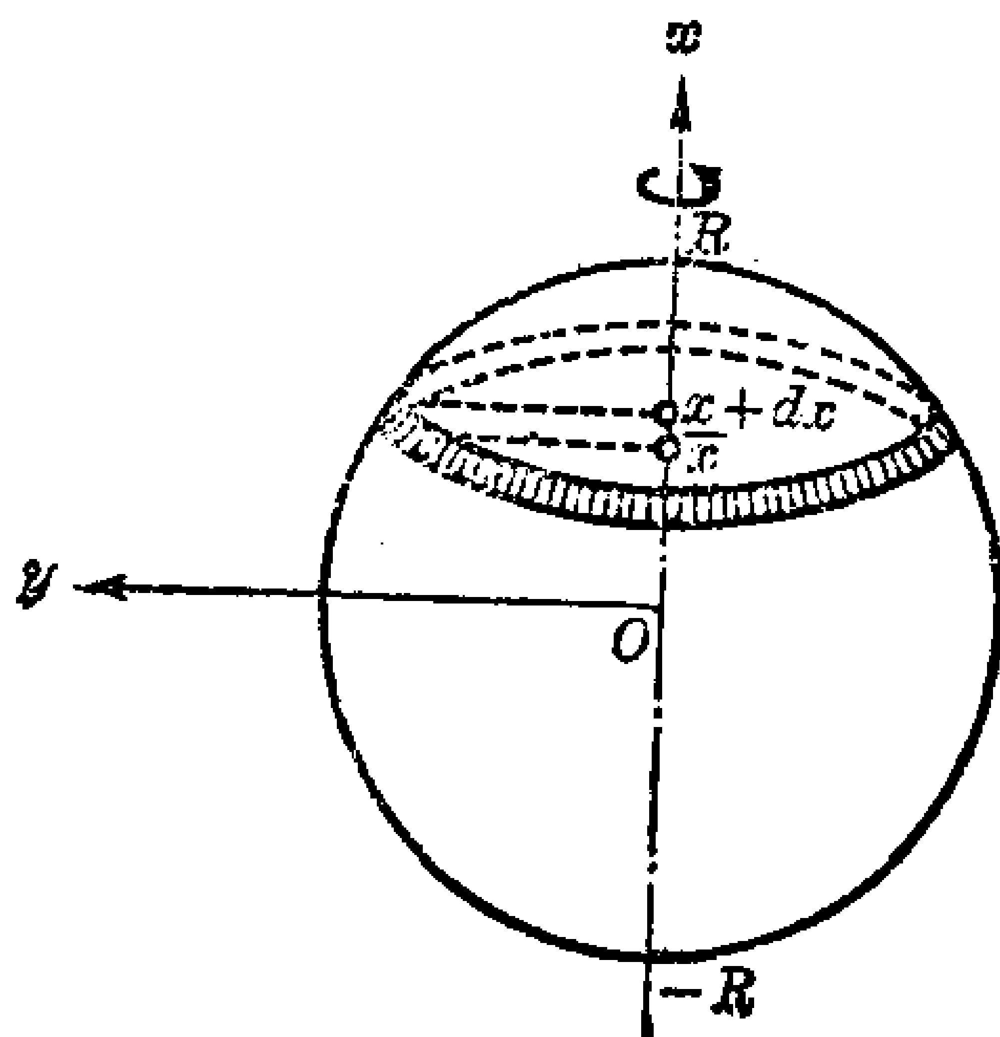


图 4-55

分割 x 轴上的区间 $[-R, R]$，球体相应地被分成若干部分. 任取一份 $[x, x+dx]$. 相应于它的，是一个薄球台，它可以近似地看成一个半径为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 的薄圆盘，厚度为 dx，因此薄圆盘的体积是 $\pi y^2\cdot dx=\pi(R^2-x^2)dx$. 球的体密度是 $\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3}$，从而得到薄圆盘的质量

$$dm = \text{体密度} \times \text{体积} = \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3} \cdot \pi (R^2 - x^2) dx$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{M}{R^3} (R^2 - x^2) dx.$$

由于 dx 很小,薄圆盘对 x 轴的转动惯量可按例 12 写出:

$$dJ = \frac{1}{2} (dm) \cdot y^2 = \frac{1}{2} dm \cdot (R^2 - x^2)$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{M}{R^3} (R^2 - x^2)^2 dx$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{M}{R^3} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx.$$

将上式从 $-R$ 到 R 求定积分,得到整个球体对 x 轴的转动惯量

$$J = \int_{-R}^{R} \frac{3}{8} \cdot \frac{M}{R^3} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{M}{R^3} \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{M}{R^3} \cdot 2 \int_{0}^{R} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx$$

$$= \frac{2}{5} MR^2.$$

3.6 交流电的平均功率,交流电电流和电压的有效值

1. 交流电的平均功率

我们知道,在直流电路中,若电流强度为 I,则电流通过电阻 R 所消耗的功率为

$$P = I^2 R.$$

这里,I 是常数,P 也是常数.

对于交流电路来说,由于电流强度 $i = i(t)$ 是 t 的函数,因此,功率 $P = i^2(t) \cdot R$ 也是 t 的函数,它表示瞬时 t 的功率.

但是,对于使用某个电器来说,计算瞬时功率是没有多大意义的,需要计算的是在一段时间内的平均功率.我们平常看见灯泡上所标"40W","60W"等字样,就表示平均功率.那么,平均功率怎样计算呢?

平均功率 $\bar{P}$ 等于交变电流 $i=i(t)$ 在一个周期内所作的功 W 被周期 T 除,即

$$\bar{P}=\frac{W}{T}.$$

由于 $i=i(t)$ 不是常数,因此,它在一个周期 $[0, T]$ 内所作的功是一个非均匀分布的量,必须用定积分来解决.我们采用微元法.

分割区间 $[0, T]$,考虑任一小段 $[t, t+dt]$.在此区间内,可近似认为电流是不变的,都是 $i(t)$,于是"以不变代变",求得局部量 ΔW 的近似值——元功 dW:

$$dW=\text{功率}\times\text{时间}=i^2(t)\cdot Rdt.$$

将上式从 0 到 T 求定积分,得到在一个周期内所作的功

$$W=\int_0^T i^2(t)\cdot Rdt=R\int_0^T i^2(t)dt,$$

从而平均功率为

$$\bar{P}=\frac{W}{T}=\left[\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt\right]\cdot R. \tag{4}$$

(4)式也可写为

$$\bar{P}=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\cdot Rdt.$$

由第三章函数的积分平均值 $\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 的定义,知平均功率 $\bar{P}$ 恰是瞬时功率函数 $P=i^2(t)\cdot R$ 在一个周期区间上的积分平均值.

完全类似地,可以求电流、电压的平均值:

$$\bar{I}=\frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt. \tag{5}$$

$$\bar{U}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt. \tag{6}$$

2. 交流电电流和电压的有效值

交流电流 $i=i(t)$ 的大小和方向是随时间变化的，但是一般电器上却标有确定的电流值，这是指电流的有效值.

什么是电流的有效值呢？

当交流电流 $i=i(t)$ 在一个周期内消耗在电阻 R 上的平均功率等于某直流电流 I 消耗在同一电阻 R 上的功率时，这个数值 I 就称为 $i(t)$ 的有效值.

容易推知：交流电流 $i(t)$ 的有效值为

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}.$$

事实上，将(4)式与直流电的功率公式

$$P=I^2R$$

相对照，发现有

$$I^2=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt,$$

因此

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}.$$

常记作

$$I_{有效}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}. \tag{7}$$

对于交流电压 $u(t)=i(t)\cdot R$，它的有效值有类似的公式

$$U_{有效}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}. \tag{8}$$

在统计学上，称 $\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$

上的均方根. 因此，由 (7)、(8) 两式知：

交流电电流、电压的有效值就是电流、电压在一个周期上的均方根.

【例 14】 设有纯电阻电路中的正弦交流电，其电流强度为

$$i = i(t) = I_m \sin \omega t.$$

其中 I_m 是电流的最大值(称为峰值)，ω 是圆频率，周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$. 求平均功率及电流的有效值.

解：由公式(4)，平均功率为

$$\bar{P} = \frac{R}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt = \frac{R}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt$$

$$= \frac{I_m^2 R}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2 R}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\,dt$$

$$= \frac{I_m^2 R}{2T}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^T$$

$$= \frac{I_m^2 R}{2T}\left[T - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega T\right]$$

$$\xlongequal{\omega T = \omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi} \frac{I_m^2 R}{2T}\left[T - \frac{1}{2\omega}\sin 4\pi\right]$$

$$= \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{I_m \cdot I_m R}{2} = \frac{I_m \cdot U_m}{2} \quad (U_m = I_m \cdot R).$$

这表示：纯电阻电路中，正弦交流电的平均功率等于电流、电压峰值的乘积的二分之一.

由公式(7)，正弦交流电流的有效值为

$$I_{有效} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}}$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_m.$$

就是说，正弦交流电流的有效值是它的峰值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，近似于 I_m 的 0.707 倍.

同理，由公式(8)可以算出正弦交流电压 $u(t)=i(t)\cdot R=I_m\sin\omega t\cdot R=I_mR\sin\omega t=U_m\sin\omega t\,(U_m=I_mR)$ 的有效值为

$$U_{有效}=\frac{U_m}{\sqrt{2}}\approx 0.707U_m.$$

对于平常供照明用的交流电压

$$u(t)=311\sin 100\pi t,$$

峰值是 311，因而电压的有效值为

$$U_{有效}=\frac{311}{\sqrt{2}}\approx 220(伏).$$

【例 15】 交流电压 $u=U_m\sin\omega t$ 经全波整流后，电压为 $u=U_m|\sin\omega t|$（图 4-56, 4-57）. 求电压的平均值和有效值.

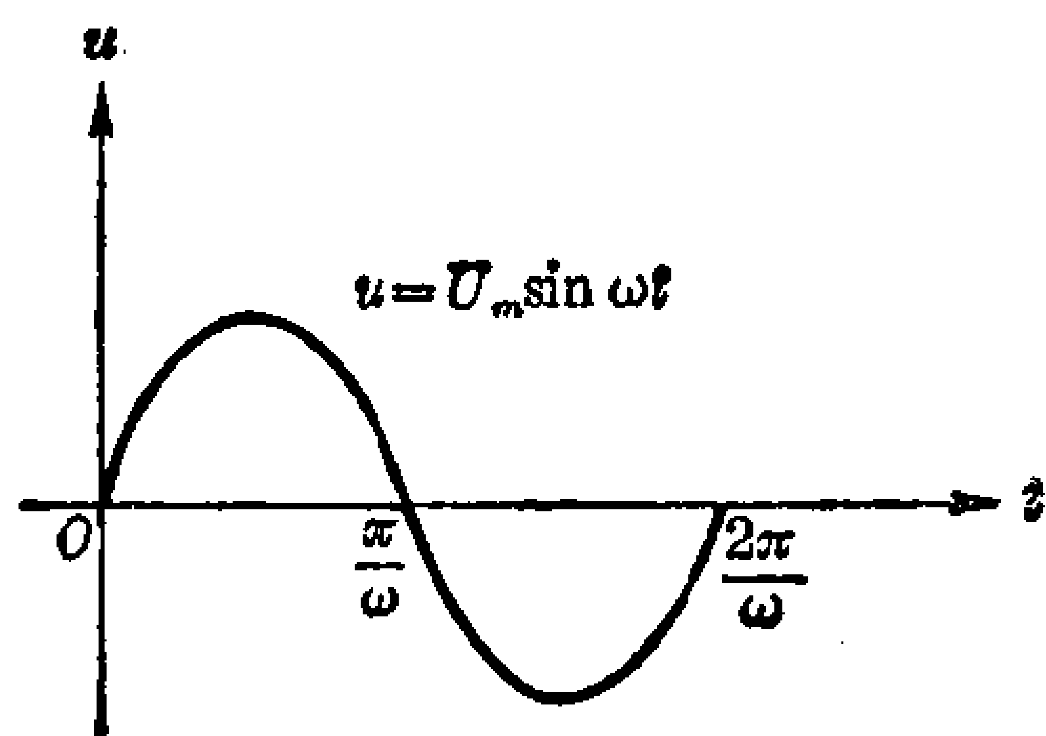


图 4-56

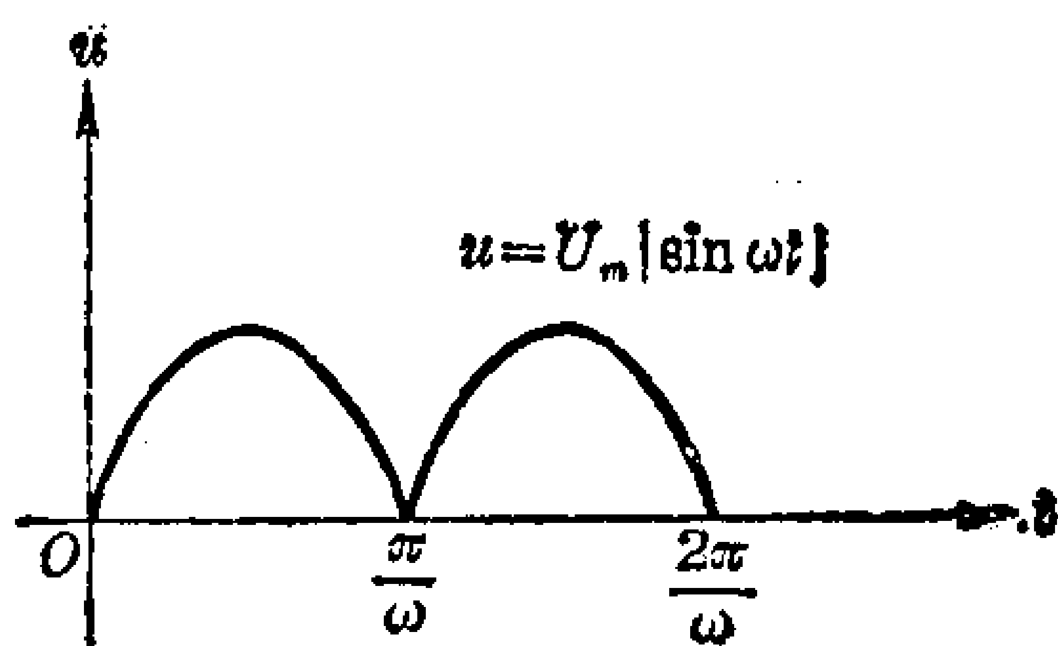


图 4-57

由公式(6)，电压的平均值为

$$\overline{U}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt=\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}U_m|\sin\omega t|dt$$

$$=\frac{U_m}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}|\sin\omega t|d(\omega t)$$

$$\xlongequal{由图 4-57}\frac{U_m}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t d(\omega t)=-\frac{U_m}{\pi}\cos\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{2U_m}{\pi}.$$

由公式(8),电压的有效值为

$$U_{\text{有效}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}U_m^2\sin^2\omega t\,dt}$$

$$=\sqrt{\frac{\omega U_m^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt}$$

$$=\sqrt{\frac{\omega U_m^2}{4\pi}\left[t-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}}$$

$$=\sqrt{\frac{U_m^2}{2}}=\frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

因此有

$$\overline{U}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}U_{\text{有效}}\approx 0.9U_{\text{有效}}.$$

这个关系式在无线电中是有用的.

习　题　二

一、求变速直线运动的路程

1. 某物体作直线运动,速度为

$$v=\sqrt{1+t}\ (\text{米/秒}),$$

求该物体自运动开始到10秒末所经过的路程,并求物体在前10秒内的平均速度.

2. 某质点作直线运动,速度为

$$v=t^2+\sin 3t,$$

求质点在前T秒内所经过的路程.

3. 一质点作直线运动,受阻力影响,速度每秒减小2米,若初速度为25米/秒,问质点能走多远?

二、求静止液体的压力

1. 水闸的门为矩形,宽20米,高16米,垂直立于水中,它的上沿与水平面相齐.求水对闸门的压力.

2. 垂直闸门的形状为等腰梯形，上底为 2 米，下底为 1 米，高 3 米，露出水面 1 米. 求水对闸门的压力.

3. 有一椭圆形薄板，长半轴为 a，短半轴为 b，薄板垂直立于水中，而其短半轴与水平面相齐. 求水对薄板的压力.

4. 一块高为 a，底为 b 的等腰三角形薄板，垂直沉没在水中，顶点在下，底边与水面相齐. 求水对薄板的压力. 如果把它倒过来放，使顶点在水平面上，底边与水平面平行，那么，水对薄板的压力是多少？

5. 一个边长为 a 的正方形薄板垂直浸入水中，它的一个顶点位于水面，而一条对角线平行于水面. 求薄板所受的侧压力.

6. 有一圆柱形水桶，高 1.5 米，底半径 0.4 米，水的高度为 1.2 米. 求水对桶壁的压力.

三、求变力所作的功

1. 弹簧所受压缩的力 F 与压缩距离 x 成正比，即 $F=kx(k>0$为比例常数). 现在弹簧由原长压缩 6 厘米，问需作多少功？

2. 半径为 r 米的半球形水池灌满了水，要把池内的水全部吸尽，需作多少功？

3. 如图 4-58，有一横截面积为 $S=20$ 米^2，深为 5 米的水池，装满了水. 要把池中的水全部抽到高为 10 米的水塔顶上去，要作多少功？

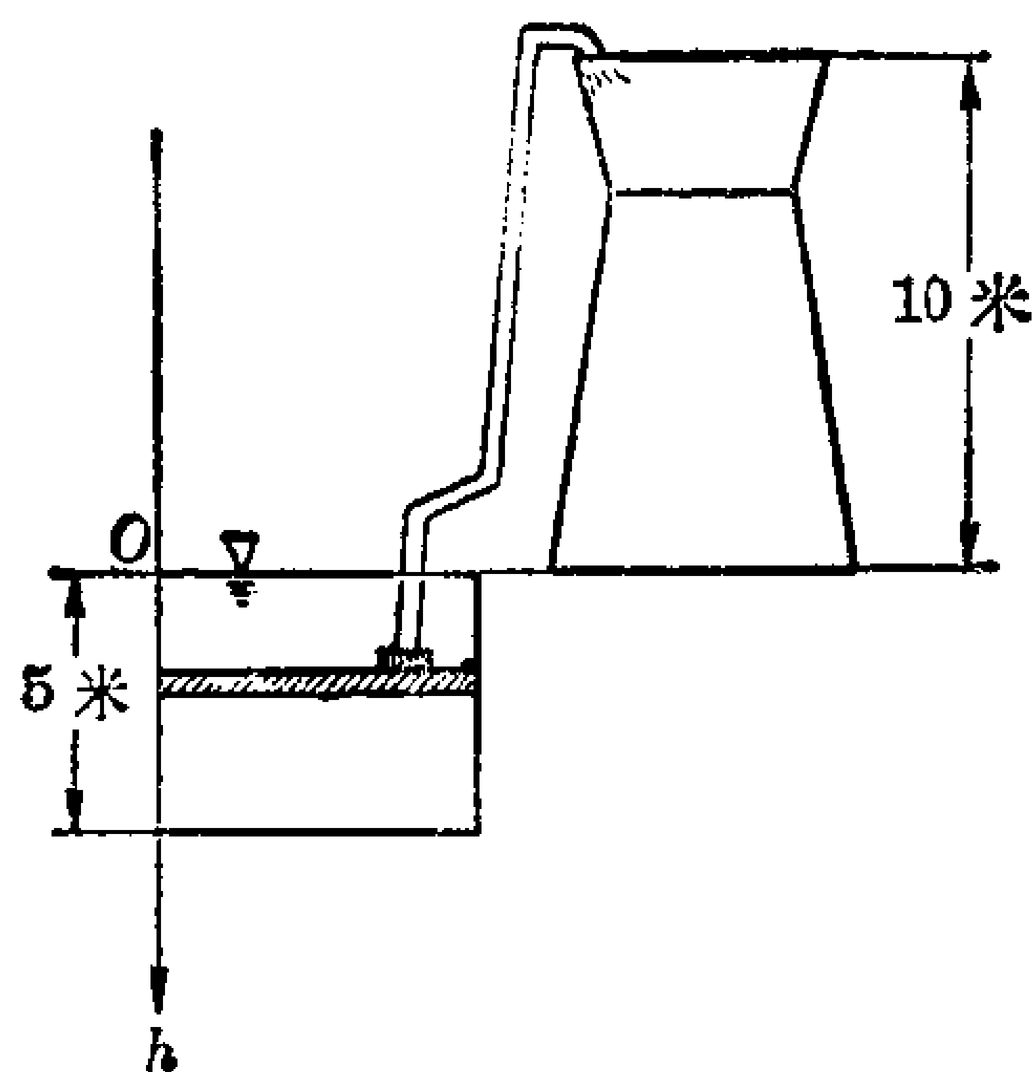


图 4-58

4. 有一圆锥台形的桶，盛满了汽油. 桶高为 3 米，上、下底半径分别为 1 米及 2 米. 试求将桶内汽油全部吸尽所耗费的功.（汽油的

比重 $\gamma=0.8$ 吨/米^3.)

5. 试计算把一颗人造地球卫星发射到远地点，克服地球引力所作的功. 卫星质量为173千克，远地点离地面2384公里，地球半径为6371公里.
6. 两带电小球，中心相距为 r，各带电荷 q_1 及 q_2. 其相互作用力可由库仑定律 $F=k\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}$（$k$ 为常数）计算. 设当 $r=50$ 厘米时，$F=20$ 克重，今两球之距离自 $r=75$ 厘米变为 $r=100$ 厘米，求 F 所作的功.
7. 一滴雨点，初始质量为 M，受重力作用下落，等速蒸发，每秒损失的质量为 m. 试求雨滴自运动开始到完全蒸发为止，重力所作的功.
8. 半径为 r 的球沉入水中，与水面相接. 球的比重为1. 问将球从水中捞出，需作多少功？

四、求引力

1. 设有两均匀细杆，长度分别为 l_1, l_2，质量分别为 m_1, m_2. 它们位于同一条直线上，相邻两端点之距离为 a. 试证此两细杆之间的引力为
$$F=\frac{m_1\cdot m_2}{l_1\cdot l_2}\cdot G\cdot\ln\frac{(a+l_1)\cdot(a+l_2)}{a(a+l_1+l_2)}\quad (G\text{ 为引力常数}).$$
2. 有一均匀细杆 AB，长为 l，质量为 M. 另有一质量为 m 的质点 C，位于过 A 点且垂直于细杆的直线上，$AC=h$. 试计算细杆对质点的引力.
3. 有一长 l 的细杆 AB，均匀带电，总电量为 Q. 在杆的延长线上，距杆近端 A 为 r_0 处，有一单位正点电荷，求这单位正点电荷所受的电场力（即电场强度），并求单位正点电荷在杆的延长线上由距 A 端为 a 处移到距 A 端为 b 处时，电场强度所作的功.
4. 有一半径为 r 的均匀半圆弧，质量为 m. 求它对位于圆心处的单位质量质点的引力.

五、转动惯量

1. 有一均匀细杆，长为 l，质量为 M. 试计算细杆绕距其一端为 $\frac{1}{6}l$ 处的旋转轴旋转的转动惯量.

2. 质量为 M, 边长为 a 的正方形均匀薄板绕它自己的一条边旋转, 角速度为 ω, 求薄板的转动惯量及转动动能.

3. 有一均匀圆环, 内直径为 D_1, 外直径为 D_2, 质量为 M. 求圆环关于过中心点且与环面垂直的轴的转动惯量.

4. 设有一均匀圆形薄板, 半径为 a, 质量为 M. 求它对于一条与圆板相切的轴的转动惯量.

5. 有一均匀的圆锥形陀螺, 质量为 M, 底半径为 R, 高为 h. 试证明陀螺绕对称轴的转动惯量为 $J=\frac{3}{10}MR^2$.

6. 设有一均匀圆柱体, 高为 h, 底半径为 a, 质量为 M. 求它关于其对称轴的转动惯量.

7. 设有一空心圆柱体, 高为 h, 内、外半径各为 r, R($r>0$, $R>0$), 体密度为 ρ. 求此柱体关于其对称轴的转动惯量.

六、求平均值, 有效值

1. 交流电压 $u=U_m\sin\omega t$ 经半波整流后的电压在一个周期内的表达式为

$$u=\begin{cases}U_m\sin\omega t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega};\\ 0, & \frac{\pi}{\omega}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

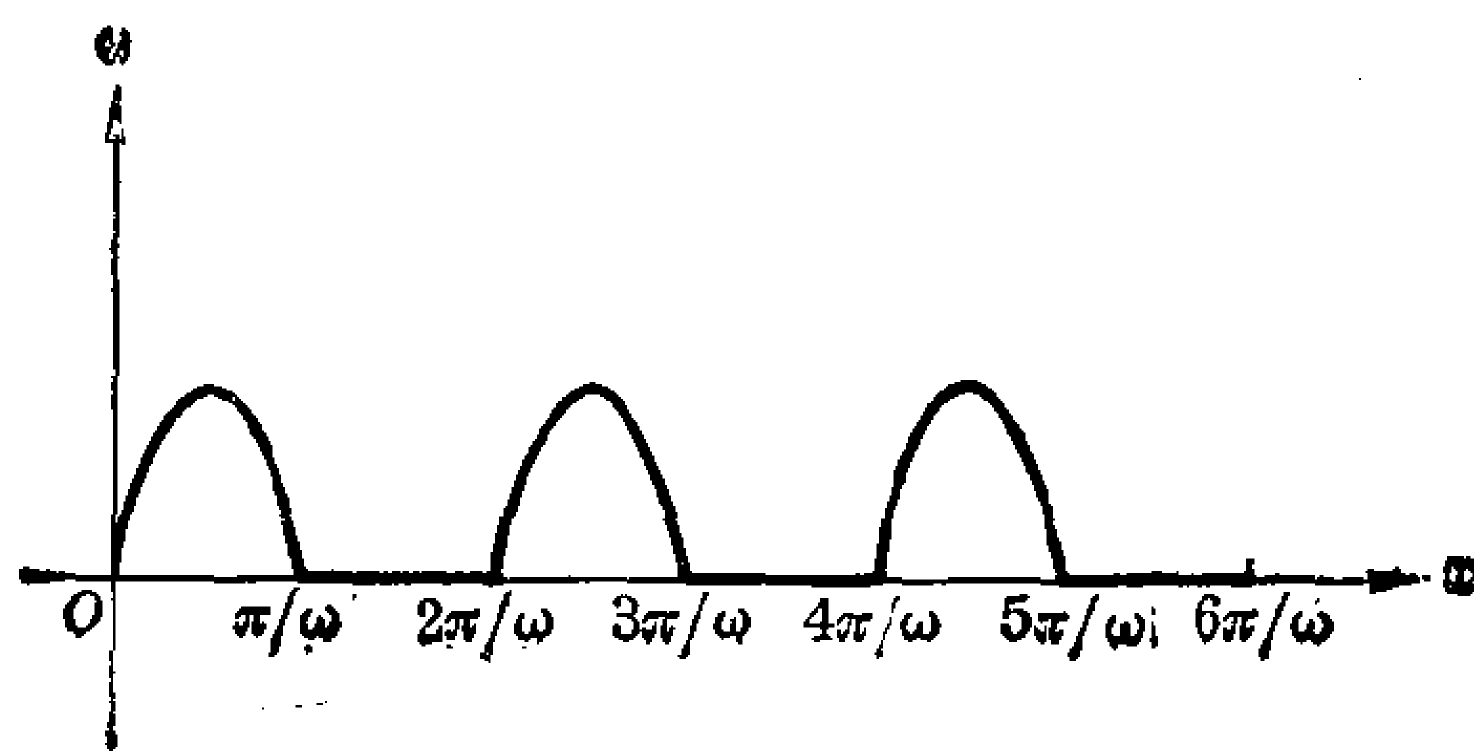


图 4-59

试求半波整流电压的平均值及有效值.

2. 交流电压 $u=U_m\sin\omega t$ 经全波可控整流, 当触发角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时, 输出电压为

$$u=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2\omega};\\ U_m\sin\omega t, & \dfrac{\pi}{2\omega}<t\leqslant\dfrac{\pi}{\omega}.\end{cases}$$

求此电压的平均值及有效值.

3. 求矩形脉冲电流

$$i=\begin{cases}a, & 0\leqslant t\leqslant c;\\ 0, & c<t\leqslant T.\end{cases}$$

的平均值及有效值.

4. 交流电压如图 4-60 所示，求电压的平均值及有效值.

5. 求周期为 T 的三角波的平均值及有效值(图 4-61).

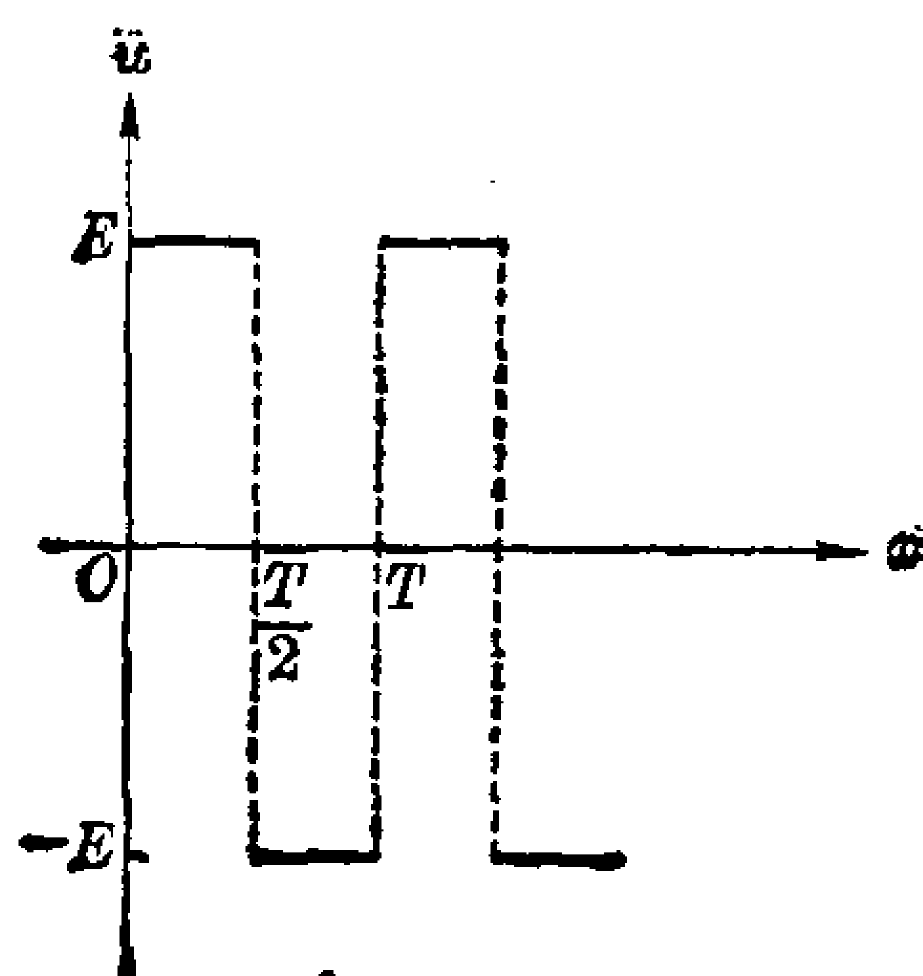


图 4-60

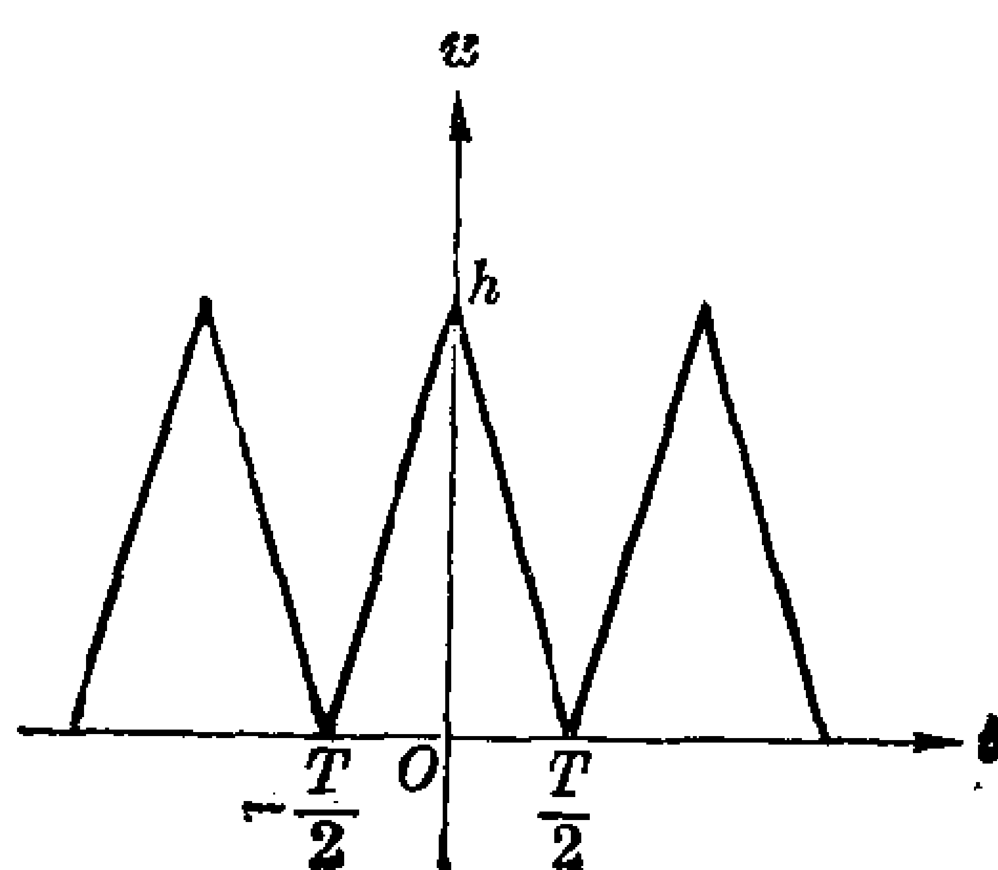


图 4-61

6. 电阻电容串联电路接到电压为 $u=\sqrt{2}\,U_m\sin\omega t$ 的交流电源上，电路中电流为

$$i=\sqrt{2}\,I_m\sin(\omega t+\varphi).$$

求这电路消耗的平均功率。

七、其它问题

1. 有一不均匀细杆，长度为 10 米，杆的线密度为 $\mu=0.3x+6$ (千克/米)，其中 x 为点到细杆一端之距离. 求杆的质量.

2. 有一抛物线形拱桥，拱高 2 米，底宽 4 米. 设水的流速为 v(米/秒)，求水的最大流量(即水满桥洞时，每秒流过的水量).

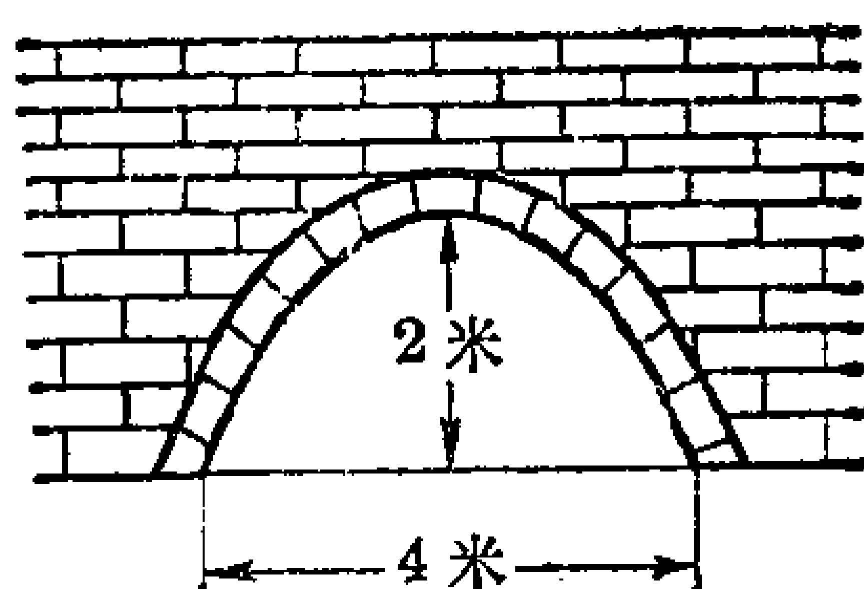


图 4-62

3. 油类通过油管时，中间流速大，越靠近管壁，流速越小. 由实验知，某处的流速 v 和该处到管子中心的距离 r 有关系式

$$v=k(a^2-r^2),$$

其中 k 为比例常数，a 为油管半径. 求通过油管的流量.

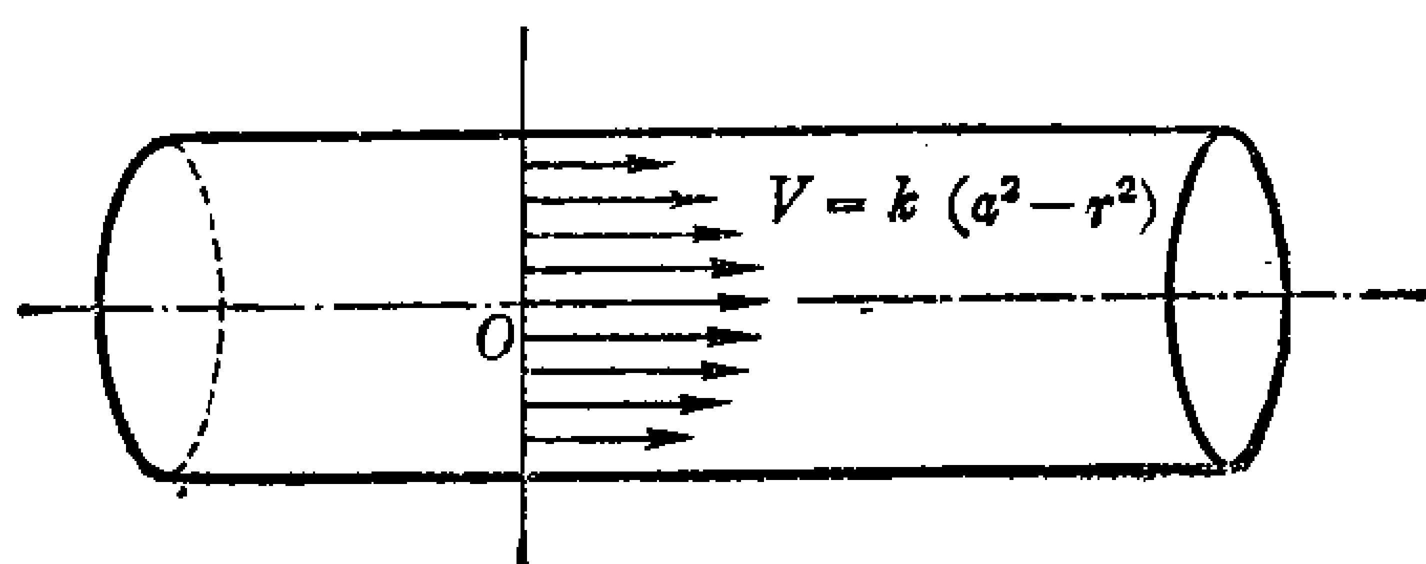


图 4-63

第四章小结

本章讨论了定积分的几何应用与物理应用. 在这些实际问题中，所要求的都是某个非均匀变化的整体量. 在解决这些问题时，我们采用了微元法. 微元法的思想是先求整体量的微元，再求整体量. 也就是先在局部范围内，“以不变代变”，写出微分式，然后，再将微分式求定积分. 它反映了无限细分与无限求和这两个步骤. 对于非均匀变化问题，这是求整体量的普遍方法.

在以上两个步骤中，关键是第一步．我们根据对实际问题的分析所写出的微元 dA，必须是局部量 ΔA 的主要部分．

怎样验证凭经验写出的 dA 确实是 ΔA 的主要部分呢？我们不能作出一般性的回答，但是对于个别问题，有时可以检验．不妨以前面物理应用中引力问题的例 7 为例来加以说明．

在坐标系的第一种取法那里，我们写出了引力微元

$$dF=f(x)dx=\frac{GM\cdot m}{l}\cdot\frac{1}{(x+a)^2}dx,$$

它是不是局部量 ΔF 的主要部分呢？是的，我们可以这样来说明：

小段细杆 $[x,\ x+dx]$ 的左端点 $x+dx$ 与质点 m 的距离最远(图 4-64)，因而把小段细杆的质量看成集中在这一点时，它对质点 m 的引力 $f(x+dx)\cdot dx$ 最小；同理，若把小段细杆的质量看成集中在右端点 x 处时，则它对质点 m 的引力 $f(x)\cdot dx$ 最大，我们在那里，正是用它来作为 dF 的．然而，实际的引力 ΔF 应该介于这两个值之间，即

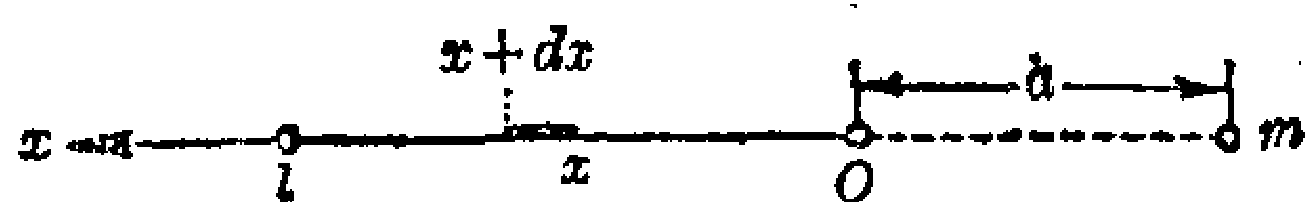


图 4-64

$$f(x+dx)\cdot dx<\Delta F<f(x)\cdot dx,$$

因而

$$0<f(x)\cdot dx-\Delta F<f(x)\cdot dx-f(x+dx)\cdot dx,$$

即

$$0<f(x)\cdot dx-\Delta F<[f(x)-f(x+dx)]\cdot dx.$$

因为 $f(x)$ 是 x 的连续函数，所以当 $dx\to 0$ 时，有

$$f(x)-f(x+dx)\to 0\quad(\text{连续性定义}),$$

从而

$$\frac{[f(x)-f(x+dx)]\cdot dx}{dx}=f(x)-f(x+dx)\to 0(当\ dx\to 0),$$

也就是说，$[f(x)-f(x+dx)]\cdot dx$ 是 dx 的高阶无穷小，即

$$[f(x)-f(x+dx)]\cdot dx=o(dx).$$

因此有

$$0<f(x)dx-\Delta F<o(dx),$$

于是得到

$$f(x)dx-\Delta F=o(dx),$$
$$\Delta F=f(x)dx+o(dx).$$

这说明 $dF=f(x)dx$ 确实是 ΔF 的主要部分.

但是，在我们解每一个应用问题时，一般说来，这样的验证是困难的，也是不必要的. 我们只要根据问题的实际情况，仔细分析，在局部范围内，抓住主要因素，列出的微分式多半就是正确的.

第五章

广义积分

前面四章所讨论的定积分$\int_a^b f(x)dx$，有两点是共同的：①积分限a，b是有限数；②被积函数$f(x)$在区间$[a, b]$上是有界的(见第三章第一节第五段——关于函数的可积性)．但是，在我们进一步研究一些理论问题或应用问题时，往往会遇到函数在无穷区间上的积分以及无界函数在有限区间上的积分．因此，需要我们将定积分的概念分别推广到这两方面，从而引进无穷积分与瑕积分，统称为广义积分．下面，我们分两节进行讨论．

第一节 无穷积分

1.1 无穷积分的定义

在第四章第三节例5中，我们曾计算过将质量为m的火箭自地面发射到离地面高度为h处所需作的功

$$W_1=\int_R^{R+h} G\frac{M\cdot m}{r^2}dr=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right).$$

其中g是重力加速度，R是地球半径．

为了使火箭脱离地球引力范围(此时$h\to+\infty$)所需作的功是

$$W_2=\lim_{h\to+\infty}W_1=\lim_{h\to+\infty}\int_R^{R+h} G\frac{M\cdot m}{r^2}dr$$

$$=\lim_{h\to+\infty}mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=mgR.$$

若记 $b=R+h$，则 $h\to+\infty$ 相当于 $b\to+\infty$，于是上式可写得简单一些：

$$W_2=\lim_{b\to+\infty}\int_R^b G\frac{M\cdot m}{r^2}dr=mgR.$$

很自然，我们把 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_R^b G\frac{M\cdot m}{r^2}dr$ 写作 $\int_R^{+\infty}G\frac{M\cdot m}{r^2}dr$，称为无穷积分（即无穷区间上的积分）．在这里，积分区间虽是无穷的，然而积分值却是一个确定的数，表明把火箭送到无穷远处所需要作的功是有限的．

对于一般的函数 $f(x)$，我们有下面的定义．

定义 1 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，并且对于任意数值 $b(b>a)$，$f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上可积．如果当 $b\to+\infty$ 时，极限

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

存在，那么，就称无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 是收敛的，并且定义它的值是 I，即

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=I.$$

如极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 不存在，那么，就说无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 是发散的，这时，它只是一个符号，而不表示数值．

无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 在几何上表示什么呢？

与定积分的几何意义相类似，当 $f(x)\geqslant 0$ 时，无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 可以看成是由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a$，$y=0$ 所围成的向右无限伸展的平面图形的面积（图 5-1）．当积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则面积为有限数，当积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，

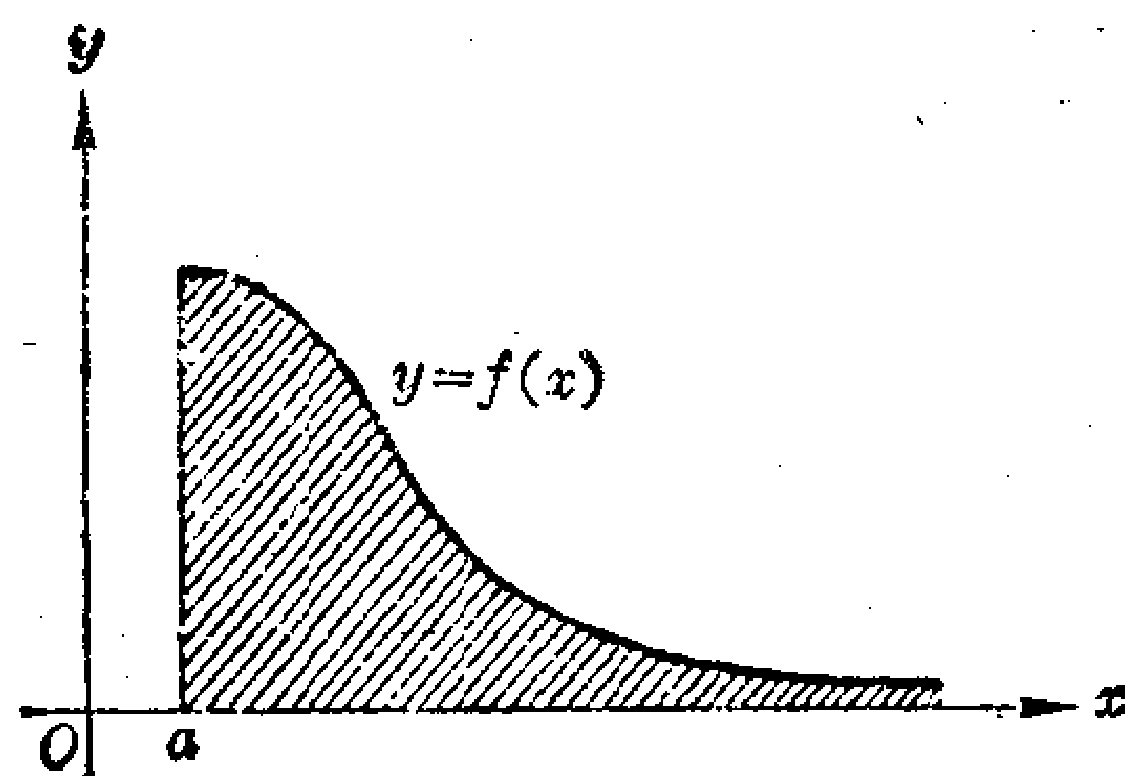


图 5-1

则表示这块面积为无穷大.

当 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有正有负，积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 在几何上表示什么？请读者考虑.

【例 1】 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 的收敛性.

解：先考虑定积分

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx=\text{arc tg}\,x\Big|_0^b=\text{arc tg}\,b,$$

然后由无穷积分定义，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\text{arc tg}\,b=\frac{\pi}{2}.$$

因此积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ 收敛，其值为 $\frac{\pi}{2}$.

【例 2】 讨论积分 $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$ 的收敛性.

解：先考虑定积分

$$\int_e^b\frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx\quad(b>e).$$

由牛顿-莱布尼兹公式，有

$$\int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\int_e^b \frac{1}{(\ln x)^2}d(\ln x)$$

$$=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_e^b=1-\frac{1}{\ln b}.$$

然后，令 $b\to+\infty$，得到

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\ln b}\right)=1-0=1.$$

即无穷积分 $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ 收敛到 1.

【例 3】 讨论积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx \text{ 和 } \int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx dx \quad (a>0)$$

的收敛性.

解：由常用积分表，查得 $e^{-ax}\sin bx$ 的原函数为

$$-\frac{e^{-ax}(a\sin bx+b\cos bx)}{a^2+b^2},$$

$e^{-ax}\cos bx$ 的原函数为 $\frac{e^{-ax}(b\sin bx-a\cos bx)}{a^2+b^2}$，于是有

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx=-\frac{e^{-ax}(a\sin bx+b\cos bx)}{a^2+b^2}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx dx=\frac{e^{-ax}(b\sin bx-a\cos bx)}{a^2+b^2}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

【例 4】 讨论积分 $\int_0^{+\infty}\sin x dx$ 和 $\int_0^{+\infty}\cos x dx$ 的收敛性.

解：对于积分 $\int_0^{+\infty}\sin x dx$，考虑

$$\int_0^b \sin x dx=-\cos x\bigg|_0^b=1-\cos b,$$

当 $b\to+\infty$ 时，$\cos b$ 没有极限，因此 $1-\cos b$ 没有极限，即无

穷积分$\int_0^{+\infty}\sin x dx$发散.

同理,积分$\int_0^{+\infty}\cos x dx$ 发散.

【例 5】 证明:无穷积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx \quad (a>0)$$

当 $P>1$ 时收敛,其值为$\frac{1}{P-1}\cdot\frac{1}{a^{p-1}}$;当 $P\leqslant 1$ 时发散.

【证】 当 $P>1$, 则 $P-1>0$, 于是

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^{-p}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{-P+1}x^{-p+1}\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-P}\left[\frac{1}{b^{p-1}}-\frac{1}{a^{p-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{1-P}\left(0-\frac{1}{a^{p-1}}\right)=\frac{1}{P-1}\cdot\frac{1}{a^{p-1}}.$$

当 $P<1$, 则 $1-P>0$, 于是

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-P}[b^{1-p}-a^{1-p}]=+\infty.$$

当 $P=1$, 则

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{x}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}[\ln b-\ln a]=+\infty.$$

因此,积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$$

当 $P>1$ 时收敛,当 $P\leqslant 1$ 时发散. ▌

以上我们定义并讨论了无穷积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

的收敛性. 同样, 可以定义 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 的无穷积分以及 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分.

定义 2 设 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上有定义, 并且对于任意数值 $a(a<b)$, $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上可积. 当 $a\to-\infty$ 时, 若极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

存在, 则称无穷积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 是收敛的, 其值为

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

即
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

若极限 (2) 不存在, 就说无穷积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 是发散的, 这时它不表示数值.

定义 3 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx,$$

其中 c 为任意实数. 当上式右端两个积分都收敛时, 则称无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 是收敛的, 显然, 它的值并不依赖于数 c 的选择. 当右端两个积分有一个发散, 则称 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 是发散的.

【例 6】 讨论积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx$ 的收敛性.

解: 考虑积分

$$\int_{-\infty}^{c}e^x dx \quad 和 \quad \int_{c}^{+\infty}e^x dx.$$

由无穷积分定义, 有

$$\int_{-\infty}^{c} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c e^x dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} e^x \Big|_a^c = \lim_{a\to-\infty}[e^c - e^a] = e^c - 0 = e^c,$$

因此，积分$\int_{-\infty}^{c} e^x dx$ 收敛．而当 $b\to+\infty$ 时，

$$\int_c^b e^x dx = e^b - e^c \to +\infty,$$

即积分$\int_c^{+\infty} e^x dx$ 发散．从而积分$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ 发散．

以上我们根据定义，初步讨论了三类无穷积分的收敛性．

1.2 无穷积分的简单性质

以下讨论，我们将只对型如$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的无穷积分进行，全部内容不难类推到积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 上去．

从定义知道，无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$实际上是变上限的定积分

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx$$

当上限 $b\to+\infty$ 时的极限，因此，它是一种函数极限．根据极限的性质，不难推出无穷积分的如下简单性质．

(1) 积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与积分$\int_c^{+\infty} f(x)dx$同时收敛或同时发散（这里 $c>a$ 为任意数），并且当积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时，有关系式

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

(2) 若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，k 为常数，则 $\int_a^{+\infty} k\cdot f(x)dx$ 也收敛，并且

$$\int_a^{+\infty} k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(3) 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 都收敛，则

$$\int_a^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]\,dx$$

也收敛，并且

$$\int_a^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

1.3 无穷积分的收敛性判别法

以上我们讨论无穷积分的收敛性都是根据定义进行的，即先求定积分，然后取极限．但是，必须指出：这种做法有局限性，因为只有对于一些比较简单的被积函数，才能写出它的原函数，并且进一步讨论其极限．在许多问题中，这种办法几乎很难进行，更不用说原函数不是初等函数的情况了．因此，需要有一套判别无穷积分收敛性的方法．下面介绍几种常用的判别法．

(1) 柯西(Cauchy)收敛原理．

根据函数极限的柯西收敛原理，我们有相应的

定理 1(Cauchy 收敛原理)　无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 $B(B>a)$，使得只要 $b_2>b_1>B$，就有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

【证】 记

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

我们知道，无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 是否收敛，取决于极限

$\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)$ 是否存在. 而极限 $\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)$ 存在的充分必要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $B(B>a)$, 使得当 $b_2>b_1>B$ 时, 恒有

$$|I(b_2)-I(b_1)|<\varepsilon.$$

而
$$\begin{aligned} I(b_2)-I(b_1)&=\int_a^{b_2} f(x)dx-\int_a^{b_1} f(x)dx \\ &=\int_a^{b_2} f(x)dx+\int_{b_1}^{a} f(x)dx=\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx, \end{aligned}$$

于是定理得证. 】

这个定理的含义很清楚: 要想一个无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 必须而且只需 $f(x)$ 在任何充分远处不论多么长的一段上, 定积分的绝对值可以任意小.

推论 设 $\int_a^b f(x)\,dx$ 对任何 $b(b>a)$ 存在, 且 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

【证】 由 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛, 根据定理 1, 有

对于任给 $\varepsilon>0$, 存在 $B(B>a)$, 使得当 $b_2>b_1>B$ 时, 恒有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx\right|<\varepsilon,$$

因 $b_2>b_1$, 故有

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx<\varepsilon.$$

又因为 $\int_a^b f(x)dx$ 对任何 $b(b>a)$ 存在, 所以积分 $\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx$ 存在*), 于是由第三章第二节的性质 5, 有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|\leqslant\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx<\varepsilon,$$

---

*) 参见第三章第三节第二段 1 (第 157 页) 的脚注.

即
$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

由定理 1, 知$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$收敛. ∎

定义(绝对收敛) 如果$f(x)$在任何有限区间$[a, b]$$(b > a)$上可积,并且积分
$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$
收敛,那么,我们称积分
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$
是**绝对收敛的**. 此时,也称函数$f(x)$在无穷区间$[a, +\infty)$上**绝对可积**.

这样,上面的推论可以叙述为**绝对收敛定理**:

如果积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$绝对收敛,那么,它必定收敛.

但是,反过来并不成立,也就是说,从$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$的收敛性,不能推出$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$也收敛. 例如:积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
是收敛的,但是积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$
却发散(见后面例 10). 这一点与定积分不同,对于定积分,从$\int_a^b f(x)\,dx$的存在性,必能推出$\int_a^b |f(x)|\,dx$存在(参见第三章第二节性质 5 的脚注).

当积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$收敛,而积分$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$发散时,则

称积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$是条件收敛的．例如：积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$是条件收敛的．

(2) 对于非负的被积函数，我们有

定理2 如果对于$x\geqslant a$，有不等式

$$f(x)\geqslant 0 \tag{3}$$

那么，无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充要条件是：积分$\int_a^b f(x)dx$对于一切$b(b>a)$是有界的．

【证】 积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$是否收敛取决于极限$\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$是否存在．今$f(x)\geqslant 0$，因而$I(b)=\int_a^b f(x)dx$是$b$的单调上升函数．由单调函数的极限存在定理，知极限$\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)$存在的充分必要条件是$I(b)$为$b$的有界函数，即$\int_a^b f(x)dx$对于一切$b(b>a)$是有界的．于是证明了定理．】

说明 不等式(3)只要对于充分大的x成立即可，这是因为无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的收敛性只与被积函数在自变量充分大时的值有关．

定理3（比较判别法）

如果当$x\geqslant a$时，有不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x),$$

那么

①从$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，可以推出$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；

②从$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散，可以推出$\int_a^{+\infty} g(x)dx$发散．

【证】 ①已知$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，由定理2，积分

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

对于一切 $b(b>a)$ 是有界的，即存在常数 $M>0$，使得对于一切 $b(b>a)$，有

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqslant M.$$

因为 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，所以

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant M,$$

即积分
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

对于一切 $b(b>a)$ 有界，从而，由定理 2 知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛.

② 假设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散，要证 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 发散. 用反证法：若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛，则由结论(1)，知 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，从而与假设相矛盾. 因此，$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 发散. 】

与定理 2 的说明类似，不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$$

只要对于充分大的 x 成立即可.

【例 7】 讨论概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

的收敛性.

解：易知当 $x\geqslant 1$ 时，有 $x^2\geqslant x$，从而 $-x^2\leqslant -x$，因此 $e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$. 而积分 $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx=\dfrac{1}{e}$ 是收敛的，于是由定理 3，积分 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ 收敛，再由性质1，知概率积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx+\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ 收敛.

【例 8】 讨论积分 $\int_1^{+\infty}\frac{e^x}{x^2}dx$ 的收敛性。

解：由洛比达法则，知当 $x\to+\infty$ 时，有 $\frac{e^x}{x}\to+\infty$。因此对于充分大的 x，有

$$\frac{e^x}{x}>1,$$

从而

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{e^x}{x}>\frac{1}{x}.$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散(例 5)，因此，由定理 3，知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{e^x}{x^2}dx$ 发散。

【例 9】 讨论积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ 和 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ 的收敛性。

解：显然，有不等式

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|=\frac{|\sin x|}{x^2}\leqslant\frac{1}{x^2},$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=1$ 收敛(例 5)，从而由定理 3，知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^2}dx$ 收敛，即积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ 绝对收敛。因此，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ 收敛(定理 1 推论)。

同理，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ 收敛。

【例 10】 证明积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，但不绝对收敛(即 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 是条件收敛的)。

【证】 ① 先证 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛。考虑等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx, \qquad (4)$$

右端第一项是通常的定积分，因此，只需证明第二项

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

是收敛的，即极限 $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{\sin x}{x} dx$ 存在.

由分部积分法，有

$$\begin{aligned} \int_{1}^{b} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_{1}^{b} \frac{1}{x} d(-\cos x) \\ &= -\frac{\cos x}{x}\Big|_{1}^{b} - \int_{1}^{b} \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_{1}^{b} \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

当 $b\to+\infty$，有

$$\begin{aligned} \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left[\cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_{1}^{b} \frac{\cos x}{x^2} dx\right] \\ &= \cos 1 - 0 - \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx, \end{aligned}$$

由例 9，积分 $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ 收敛，因此，$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛.

② 再证 $\int_{0}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ 发散.

由性质 1，知只须证积分

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

发散. 因为 $$|\sin x| \leqslant 1,$$

所以 $$|\sin x| \cdot |\sin x| \leqslant |\sin x| \cdot 1,$$

即 $$\sin^2 x \leqslant |\sin x|.$$

从而对于 $x \geqslant 1$，有

$$\frac{\sin^2 x}{x} \leqslant \frac{|\sin x|}{x}. \tag{5}$$

容易证明积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x} dx \tag{6}$$

发散. 事实上,假设积分(6)收敛,那么,由于积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx \tag{7}$$

收敛$\left(\text{证明同} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx\right)$, 由性质 3, 积分(6)与(7)的和,也就是积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$$

应该收敛,但这是不正确的(参见例 5). 因此,积分(6)发散.

再由不等式(5)及比较判别法,知积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

发散.

于是证明了$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ 是发散的. 亦即$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$条件收敛. ▌

定理 3′ (比较判别法的特殊情形)

当 x 充分大时,若有不等式

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{c}{x^\alpha} \quad (\alpha > 1,\ c \text{ 为常数}),$$

则积分
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (a > 0)$$

收敛;

当 x 充分大时,若有不等式

$$f(x) \geqslant \frac{c}{x^\alpha} \quad (\alpha \leqslant 1,\ c > 0 \text{ 为常数}),$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (a>0)$$

发散.

【证】 由定理3及例5即可证明. ▌

定理3′虽是简单而明显的,但是它给出了被积函数$f(x)$的比较标准: $g(x)=\frac{c}{x^\alpha}(c>0)$, 对于我们具体作题有一定的启发性.

【例11】 讨论积分$\int_3^{+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-5}}dx$的收敛性.

解: 由于$x\geqslant 3$, 因此有不等式

$$\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-5}}>\frac{2x}{\sqrt{x^2-5}}>\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=2,$$

再由定理3′, 知积分

$$\int_3^{+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-5}}dx$$

发散.

定理4(比较判别法的极限形式)

对于非负函数$f(x)$及$g(x)$*), 若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$

则有结论:

① 当$0<l<+\infty$时, 积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与积分$\int_a^{+\infty}g(x)dx$同时收敛或同时发散;

② 当$l=0$时, 从积分$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛, 可以推出积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛;

③ 当$l=+\infty$时, 从积分$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散, 可以推出积分

*) 只需当x充分大时, 有$f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$.

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

【证】 ① 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, $l>0$, 则对于给定的正数 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}$, 必存在某个 $x_0(x_0>a)$, 使得当 $x>x_0$ 时, 有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{l}{2},$$

$$-\frac{l}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}-l<\frac{l}{2},$$

而 $g(x)$ 恒正, 故

$$-\frac{l}{2}\cdot g(x)<f(x)-l\cdot g(x)<\frac{l}{2}\cdot g(x),$$

即当 $x\geqslant x_0$ 时, 有

$$\frac{l}{2}\cdot g(x)<f(x)<\frac{3}{2}l\cdot g(x). \tag{8}$$

当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_{x_0}^{+\infty} g(x)dx$ 从而 $\int_{x_0}^{+\infty}\frac{3}{2}l\cdot g(x)dx$ 收敛(性质 1, 2), 于是根据不等式 (8) 的右端及定理 3, 知 $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 从而 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散, 则 $\int_{x_0}^{+\infty} g(x)dx$ 从而 $\int_{x_0}^{+\infty}\frac{l}{2}\cdot g(x)dx$ 发散, 于是根据不等式(8)的左端及定理 3, 知 $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 从而 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散.

这就证明了积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同时收敛或同时发散.

② 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l=0$, 则对于给定的正数 $\varepsilon=1$, 必存在某个 $x_1(x_1>a)$, 使得当 $x>x_1$ 时, 有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-0\right|=\frac{f(x)}{g(x)}<1,$$

而$f(x)$和$g(x)$恒正，因此，当$x>x_1$时，有

$$0\leqslant f(x)<g(x). \tag{9}$$

当$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，则$\int_{x_1}^{+\infty}g(x)dx$收敛，于是由定理3及不等式(9)，知$\int_{x_1}^{+\infty}f(x)dx$收敛，从而$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛.

③ 当$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$，则必存在某个$x_2(x_2>a)$，使得当$x>x_2$时，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>1,$$

而$g(x)$恒正，故当$x>x_2$时，有

$$f(x)>g(x). \tag{10}$$

当$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散，则$\int_{x_2}^{+\infty}g(x)dx$发散，于是由定理3及不等式(10)，知$\int_{x_2}^{+\infty}f(x)dx$发散，从而$\int_a^{+\infty}f(x)$发散. ▌

定理4′ 设当x充分大时，有$f(x)\geqslant 0$，又

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\cdot f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}}=l,$$

则有结论：

① 若$0<l<+\infty$，则当$\alpha>1$时，积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

收敛；当$\alpha\leqslant 1$时，积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

发散.

② 若$l=0$，则当$\alpha>1$时，积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛.

③ 若 $l=+\infty$, 则当 $\alpha\leqslant 1$ 时, 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

发散.

【证】 由定理 4 及前面例 5 即可得证. ▌

定理 4′ 的结论①也可用无穷小量的语言来叙述. 由条件

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}=l,\quad 0<l<+\infty,$$

知 $f(x)$ 与 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$ 在 $x\to+\infty$ 时是同级无穷小, 即 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时, 是关于 $\frac{1}{x}$ 的 α 级无穷小. 结论①是说:

当 $x\to+\infty$ 时, 与 $\frac{1}{x}$ 相比较, 若 $f(x)$ 是高于一级的无穷小, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛; 当 $f(x)$ 是等于或低于一级的无穷小, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

发散.

【例 12】 讨论积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}\,dx$ 的收敛性.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}\Big/\frac{1}{x^{3/2}}=1,$

由定理 4′ 结论①, 知积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}\,dx$$

收敛.

【例 13】 积分$\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$是收敛的. 这是因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=1.$$

【例 14】 积分$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx$是发散的. 这是因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\Big/\frac{1}{x}=\pi/2.$$

【例 15】 积分$\int_1^{+\infty}x^\alpha\cdot e^{-x}dx$对任何固定的数$\alpha$是收敛的. 这是因为对任何$\alpha$, 都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha\cdot e^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2+\alpha}}{e^x}=0.$$

【例 16】 讨论积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^k\ln x}dx$的收敛性.

解: 当$k=1$, 则积分为

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx,$$

容易由收敛性定义直接判断它发散. 因此,只需考虑$k>1$和$k<1$的情形.

根据定理 4′, 考虑极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha\cdot\frac{1}{x^k\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-k}}{\ln x}=\begin{cases}0, & \text{当 } k>\alpha;\\ +\infty, & \text{当 } k<\alpha.\end{cases}$$

在第一种情形, 由定理 4′ 之 ②, 知当$\alpha>1$从而$k>1$时, 积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^k\cdot\ln x}dx$$

收敛．在第二种情形，由定理 4′ 之③，知当 $\alpha\leqslant 1$ 从而 $k<1$ 时，积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^k\ln x}\,dx$$

发散．

综合起来，得到结论：

积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^k\ln x}\,dx$ 当 $k>1$ 时收敛，当 $k\leqslant 1$ 时发散．

习　题　一

1．求下列积分的值：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\,dx$;　　(2) $\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx\quad(\lambda>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{k^2+x^2}dx\quad(k>0)$;　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2+x^2}dx\quad(k>0)$;

(5) $\int_{-\infty}^{0}x\cdot e^{-x^2}dx$;　　(6) $\int_{2/\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$;　　(8) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\,dx$;

(9) $\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1-x^2)^2}\,dx$;　　(10) $\int_0^{+\infty}x^n\cdot e^{-x}dx$　(n 为正整数)．

2．讨论下列积分的收敛性：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$;　　(2) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx$;

(3) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}\,dx$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$;

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;　　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{k^2+x^2}\,dx$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{k^2+x^2}\,dx$;　　(8) $\int_0^{+\infty}x\sin x\,dx$;

(9) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$;　　(10) $\int_{1.1}^{+\infty}\operatorname{tg}\frac{2}{x^3}dx$.

3．证明：无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 与 } \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

同时收敛或同时发散，其中 $c>a$ 为任意数.

4. 证明：设 $f(x)$, $g(x)$ 在任何有限区间 $[a, b]$($b>a$)上可积，且积分 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g^2(x)dx$ 收敛，则积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)\cdot g(x)|dx$ 和 $\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]^2 dx$ 都收敛.

5. 证明分部积分公式对于无穷积分也成立：

$$\int_a^{+\infty} u(x)d[v(x)] = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)d[u(x)]$$

(当式中各项都有意义时)．其中 $u(+\infty)\cdot v(+\infty)$ 表示极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\cdot v(x)$．并由此证明：积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$$

收敛，且等于 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

6. 设 $f(x)$ 的图形如图 5-2 所示，问积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 及 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 是否收敛？几何意义是什么？

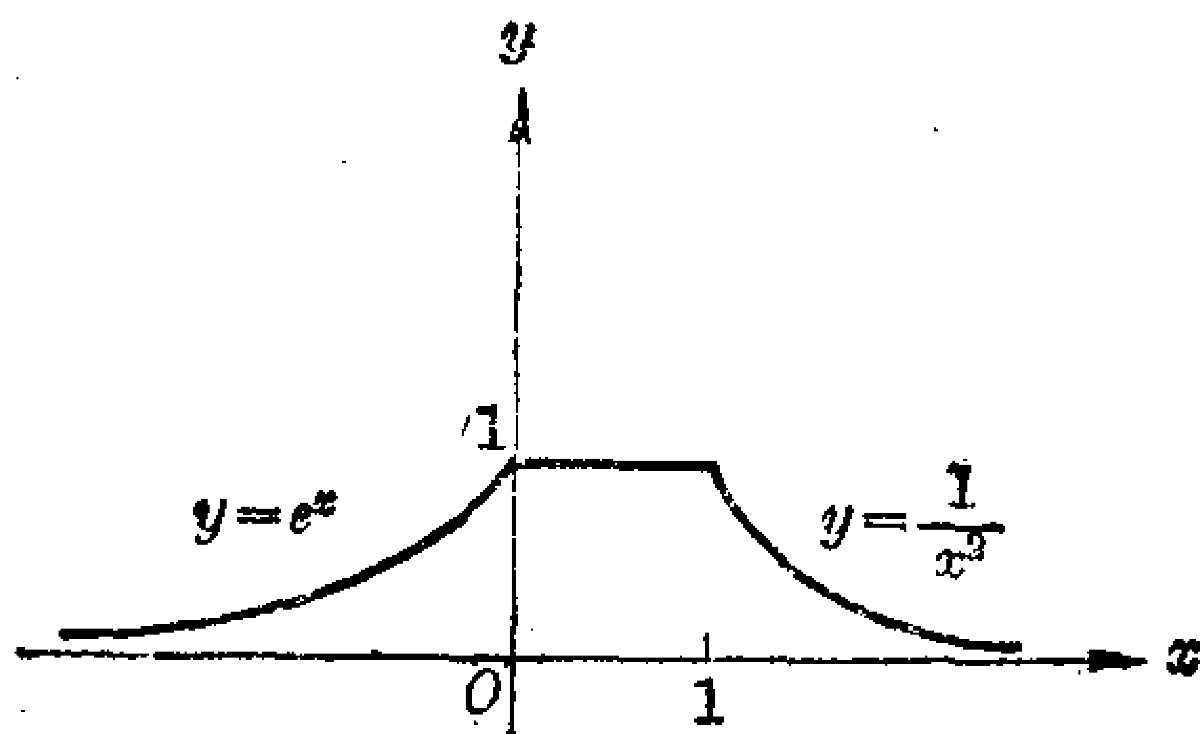


图 5-2

7. 设 $f(x)$ 的图形如图 5-3 所示，问积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 及 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 是否收敛？几何意义是什么？

8. 有一根无穷长的均匀细杆，线密度为 ρ，另有一质量为 m 的质点，与细杆的垂直距离为 a，试求细杆对质点 m 的引力.

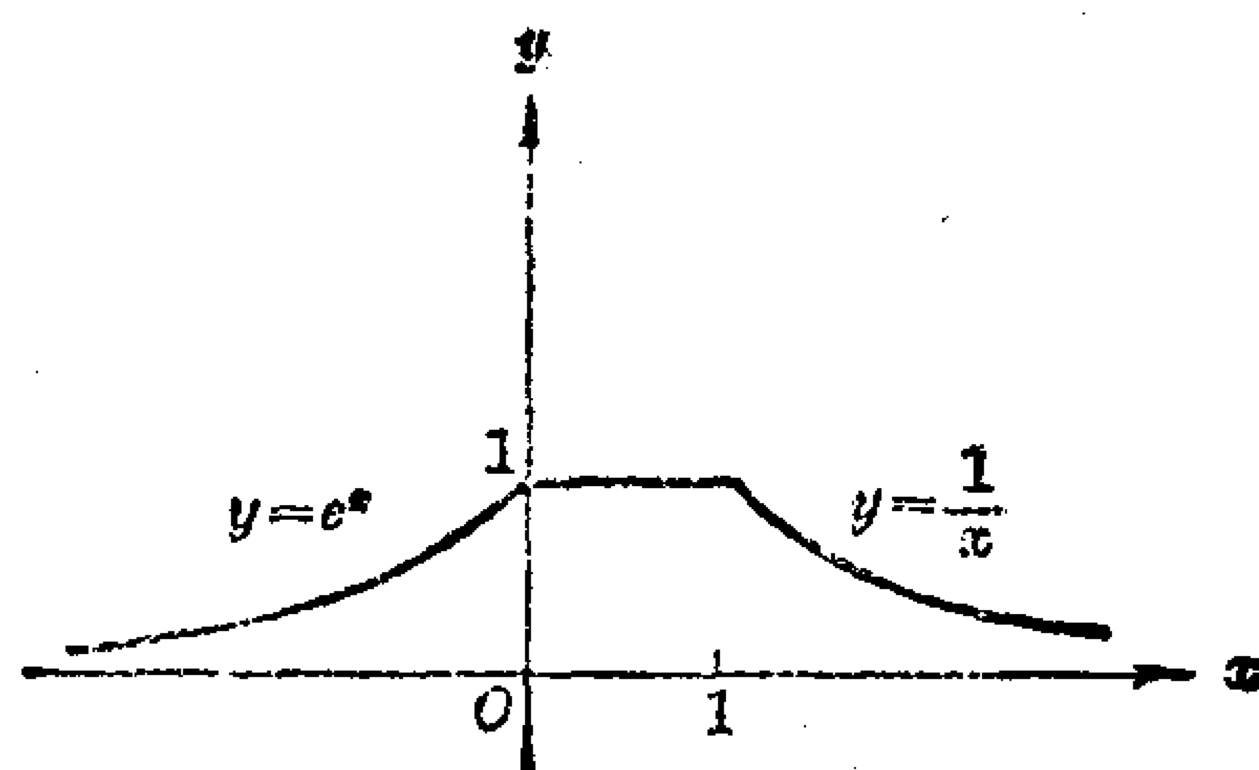


图 5-3

第二节 瑕积分

2.1 瑕积分的定义

在第一节，我们讨论了函数在无穷区间上的积分——无穷积分，这是一种广义积分．有时，我们还会碰到另外一类广义积分，积分区间是有限的，但是被积函数在区间上是无界的，也就是说，被积函数在区间的某些点处没有定义，并且在这些点附近无界．例如积分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx,$$

其被积函数在点 $x=0$ 处无定义，并且在 $x=0$ 附近无界（图 5-4）．

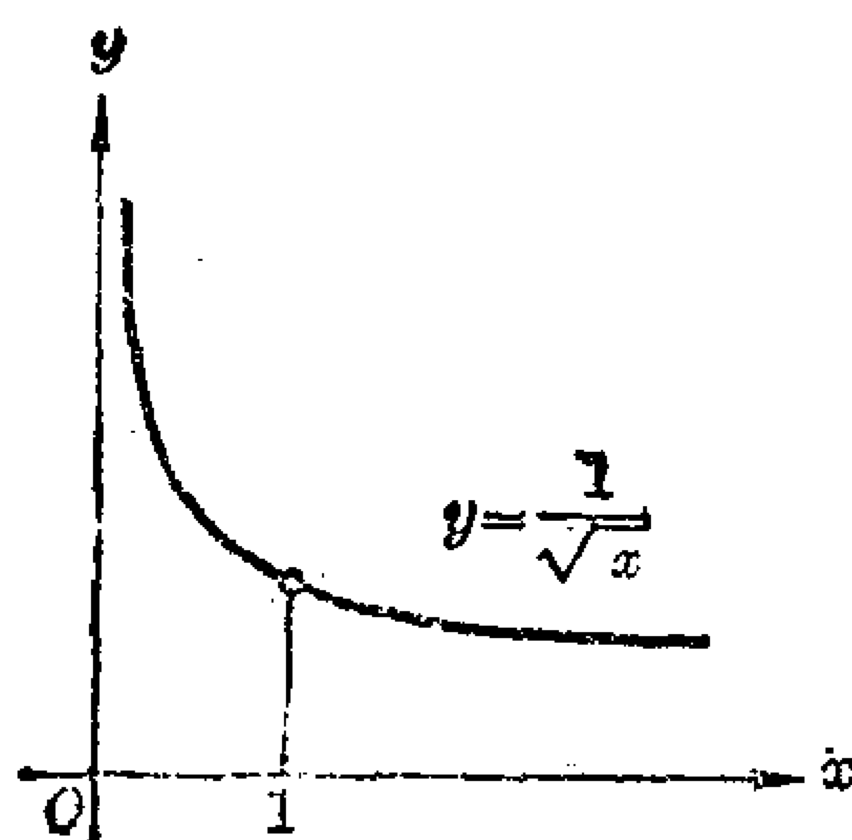


图 5-4

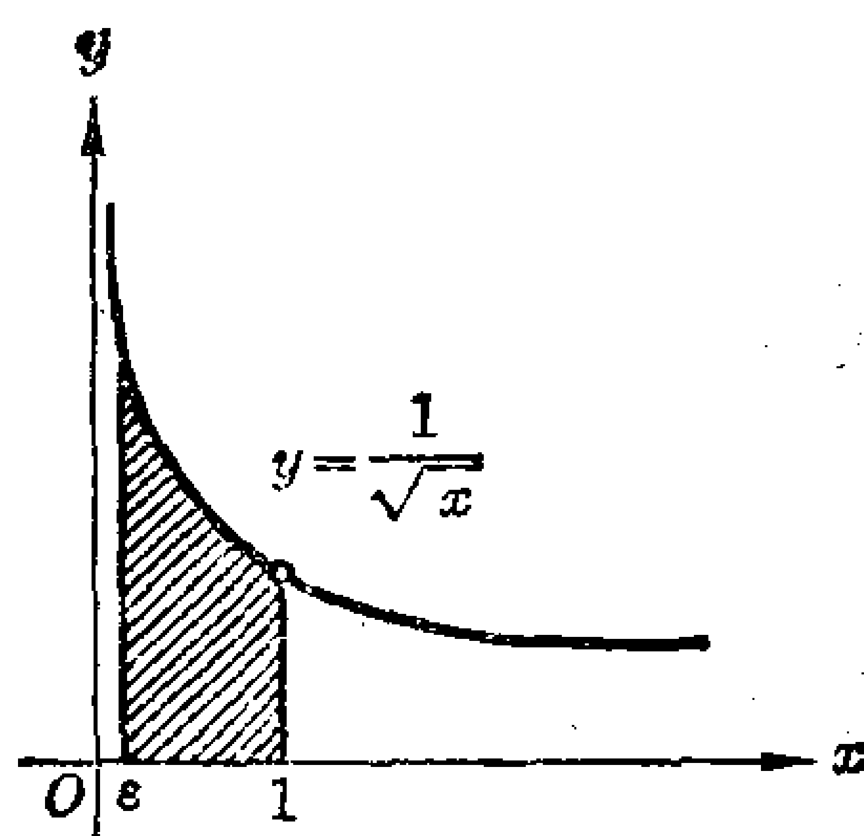


图 5-5

这个积分该怎样计算呢?

先对任意小的正数 ε, 考虑定积分

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}=2-2\sqrt{\varepsilon}.$$

它表示图 5-5 中带斜线部分的面积. ε 越小,这块面积越大,当 $\varepsilon\to0$ 时,这块面积趋近于 2, 即

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}(2-2\sqrt{\varepsilon})=2.$$

很自然地, 我们把极限值 2 作为由曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 直线 $x=1$ 以及 x 轴, y 轴所围成的向上无限伸展的开口曲边梯形的面积(图 5-4), 并把这个结果认为就是广义积分$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$的值. 换句话说,我们把广义积分$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 定义作如下定积分的极限:

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

这种广义积分称为瑕积分,而点 $x=0$ 称为函数$\frac{1}{\sqrt{x}}$的瑕点.

下面给出一般定义.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间$(a, b]$上有定义, 并且对于任意小的正数 $\varepsilon(0<\varepsilon<b-a)$, $f(x)$ 在区间$[a+\varepsilon, b]$上可积, 但 $f(x)$ 在点 $x=a$ 附近无界. 如果当 $\varepsilon\to0$ 时,极限

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx \tag{1}$$

存在, 那么, 就称无界函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的瑕积分 $\int_{a}^{b}f(x)dx$ 是收敛的,其值为 (1),即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

如果极限(1)不存在，那么，就称瑕积分$\int_a^b f(x)\,dx$是发散的，这时，它不表示数值，只是一个记号.

点$x=a$称为函数$f(x)$的瑕点. 有时为了方便，也把$x=a$称为积分$\int_a^b f(x)\,dx$的瑕点.

同样，对于$x=b$是瑕点的情形，我们有

定义 2 设$f(x)$在$[a,\ b)$上有定义，并且对于任意小的正数$\varepsilon(0<\varepsilon<b-a)$，$f(x)$在区间$[a,\ b-\varepsilon]$上可积，但$f(x)$在点$x=b$附近无界. 当$\varepsilon\to 0$时，若极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{2}$$

存在，则称无界函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上的瑕积分$\int_a^b f(x)\,dx$是收敛的，其值为(2)，即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

若极限(2)不存在，则称瑕积分$\int_a^b f(x)\,dx$是发散的，这时，它不表示数值.

此外，还有

定义 3 当$f(x)$以区间$[a,\ b]$的两个端点$x=a$，$x=b$为瑕点，而在$[a,\ b]$内部无其它瑕点，则定义瑕积分为

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{a+\varepsilon_1}^c f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_c^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx^{*)}. \tag{3}$$

其中c为a与b之间的任意实数. 当(3)式右端的两个瑕积

*) $\varepsilon\to 0^+$表示ε大于0而趋向于0.

分都收敛时,就称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$是收敛的,其值由(3)式计算. 显然,这时$\int_a^b f(x)dx$的值并不依赖于数c的选择.当(3)式右端的两个瑕积分中有一个发散,就称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$是发散的.

定义4 当$f(x)$在$[a, b]$内部有一个瑕点$x=c$ $(a<c<b)$,则定义瑕积分为

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \tag{4}$$

当(4)式右端两个瑕积分都收敛时,就称$\int_a^b f(x)dx$是收敛的,其值由(4)式计算. 当这两个瑕积分中有一个发散时,就称$\int_a^b f(x)dx$是发散的.

瑕积分的记号$\int_a^b f(x)dx$与定积分一样,但是含义不同,这一点必须注意. 碰到一个积分$\int_a^b f(x)dx$,首先要看看$f(x)$在$[a, b]$上有无瑕点,如果是瑕积分,那么就应按瑕积分来考虑,不能误认为是普通定积分.

【例1】 讨论瑕积分$\int_0^1 \ln x dx$的收敛性.

解:
$$\int_0^1 \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}[x\ln x-x]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0^+}[-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon]$$

$$=-1-\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon\ln\varepsilon=-1 \quad (\text{由洛比达法则}).$$

因此积分$\int_0^1 \ln x dx$收敛,其值为-1.

【例 2】 讨论瑕积分$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$的收敛性.

解: $x=0$是瑕点.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 -\sin\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\cos\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\cos1-\cos\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

因为当$\varepsilon\to0^+$时, $\cos\frac{1}{\varepsilon}$无极限, 所以上述极限值不存在, 即积分$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$发散.

【例 3】 讨论积分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

的收敛性.

解: 第一个积分有瑕点$x=1$, 第二个积分有瑕点$x=-1$, 第三个积分有瑕点$x=1$和$x=-1$. 由于

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^0=\lim_{\varepsilon\to0^+}[-\arcsin(-1+\varepsilon)]=\frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

因此三个瑕积分都是收敛的.

【例 4】 讨论积分 $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx$ 的收敛性.

解: $x=1$ 是瑕点.

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{x\ln x}\,dx=\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{\ln x}\,d(\ln x)$$

$$=\ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=\ln(\ln 2)-\ln[\ln(1+\varepsilon)].$$

当 $\varepsilon\to 0^+$ 时, $\ln[\ln(1+\varepsilon)]$ 成为 $-\infty$, 没有极限, 因此, 积分 $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx$ 发散.

【例 5】 证明: 瑕积分

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx \quad (b>0,\ p>0)$$

当 $p<1$ 时收敛; 当 $p\geqslant 1$ 时发散.

【证】 $x=0$ 是瑕点.

当 $p<1$ 时, $1-p>0$, 于是

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^b x^{-p}\,dx=\frac{1}{1-p}\lim_{\varepsilon\to 0^+} x^{1-p}\Big|_\varepsilon^b$$

$$=\frac{1}{1-p}\lim_{\varepsilon\to 0^+}[b^{1-p}-\varepsilon^{1-p}]=\frac{1}{1-p}\cdot b^{1-p}.$$

当 $p=1$ 时,

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx=\int_0^b \frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^b \frac{1}{x}\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln x\Big|_\varepsilon^b=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln b-\ln\varepsilon]=+\infty.$$

当 $p>1$ 时, $p-1>0$, 于是

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b x^{-p}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-p}[b^{1-p}-\varepsilon^{1-p}]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{b^{p-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\right]=+\infty.$$

因此，积分$\int_0^b \frac{1}{x^p}dx(b>0)$ 当 $p<1$ 时收敛，当 $p\geqslant 1$ 时发散.]

思考题　证明瑕积分

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx \quad 与 \quad \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx \quad (a<b)$$

在 $p<1$ 时收敛，在 $p\geqslant 1$ 时发散.

以上我们根据收敛性定义讨论了几个瑕积分的收敛性. 下面介绍瑕积分的简单性质及收敛性判别法.

由于瑕积分的理论与无穷积分的理论几乎是完全平行的，因此，我们只作叙述，不加证明.

为了叙述方便，在下面两段里，我们仅对 $x=a$ 是瑕点的情形加以讨论，别的情形，读者可以类推.

2.2 瑕积分的简单性质

(1) 瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 与瑕积分$\int_c^b f(x)dx$ 同时收敛或同时发散，其中 $c(a<c<b)$ 是任一实数. 当$\int_a^b f(x)dx$ 收敛，则$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$. 右端第二项是个定积分.

(2) 若$\int_a^b f(x)dx$ 收敛，k 为常数，则$\int_a^b kf(x)dx$也收敛，并且

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

(3) 若$\int_a^b f(x)dx$ 与$\int_a^b g(x)dx$收敛，则$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx$ 也收敛，并且

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$$

2.3 瑕积分的收敛性判别法

对于 $x=a$ 是瑕点的情形，我们有

(1) 柯西收敛原理.

定理 1 瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

收敛的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<\delta_1,\ \delta_2<\delta$ 时，恒有

$$\left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

定义（绝对收敛） 设 $f(x)$ 对任何 $\varepsilon>0$，其定积分 $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 都存在，并且瑕积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛。

定理 1 的**推论**（**绝对收敛定理**）.

若 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛，则必收敛.

(2) 对于非负的被积函数，我们有

定理 2 当 $a<x\leqslant b$ 时，若有不等式

$$f(x)\geqslant 0, \tag{5}$$

则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件是：积分 $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 是 ε 的有界函数（这里 $0<\varepsilon<b-a$）.

说明 不等式 (5) 只要对于充分接近于瑕点 a 的 x 成立即可.

定理 3（**比较判别法**） 当 $a<x\leqslant b$ 时，若有不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x), \tag{6}$$

则

① 从$\int_a^b g(x)dx$收敛，可以推出$\int_a^b f(x)dx$收敛；

② 从$\int_a^b f(x)dx$发散，可以推出$\int_a^b g(x)dx$发散.

与定理2类似，不等式(6)只要对于充分接近于a的x成立即可.

若选择$g(x)=\frac{c}{(x-a)^\alpha}$ $(c>0)$作为比较标准，则我们有

定理3′（比较判别法的特殊情形）

当x充分接近于a时，若有不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant \frac{c}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha<1,\ c\text{ 为常数}),$$

则积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

收敛；

当x充分接近于a时，若有不等式

$$f(x)\geqslant\frac{c}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha\geqslant 1,\ c>0\text{ 为常数}),$$

则积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

发散.

定理4′（比较判别法的极限形式）

对于非负函数$f(x)$，$g(x)$*)，若

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$

则有结论：

① 当$0<l<+\infty$时，$\int_a^b f(x)dx$与$\int_a^b g(x)dx$同时收敛或同时发散；

---

*) 当x充分接近瑕点a时，有$f(x)\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$即可.

② 当$l=0$时，如果$\int_a^b g(x)dx$收敛，那么$\int_a^b f(x)dx$也收敛；

③ 当$l=+\infty$时，如果$\int_a^b g(x)dx$发散，那么$\int_a^b f(x)dx$也发散.

选择$g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$，我们有

定理4′（定理4的特殊情形）

设当x充分接近于a时，$f(x)\geqslant 0$，并且

$$\lim_{x\to a}(x-a)^\alpha\cdot f(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}}=l,$$

则有结论：

① 若$0<l<+\infty$，则当$\alpha<1$时，积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

收敛，当$\alpha\geqslant 1$时，积分发散.

② 若$l=0$，则当$\alpha<1$时，积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

收敛.

③ 若$l=+\infty$，则当$\alpha\geqslant 1$时，积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

发散.

结论①可用无穷大量的语言叙述为：

当$x\to a$时，若$f(x)$是关于$\dfrac{1}{x-a}$的α级无穷大，则当$\alpha<1$时，积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，当$\alpha\geqslant 1$时，积分发散.

【例6】 讨论积分$\int_0^1 \dfrac{1}{\ln x}dx$的收敛性.

解：$x=1$是瑕点．由于

$$\lim_{x\to1}(x-1)\cdot\frac{1}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}$$

$$\xlongequal{\text{由洛比达法则}}\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1,$$

因此，被积函数 $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ 当 $x\to1$ 时是关于 $\frac{1}{x-1}$ 的一级无穷大，从而由定理 4′ 之①，知积分 $\int_0^1\frac{1}{\ln x}dx$ 发散。

【例 7】 讨论积分 $\int_1^2\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-1}}dx$ 的收敛性。

解：$x=1$ 是瑕点. 被积函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-1}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}},$$

因此

$$(x-1)^{\frac{1}{4}}\cdot f(x)=(x-1)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}\cdot\sqrt[4]{x^3+x^2+x+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3+x^2+x+1}}\to\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\quad(\text{当 } x\to1).$$

即被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-1}}$ 当 $x\to1$ 时是关于 $\frac{1}{x-1}$ 的 $\frac{1}{4}$ 级无穷大. 因此，由定理 4′ 之①，知积分 $\int_1^2\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-1}}dx$ 收敛。

【例 8】 讨论积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 的收敛性。

解：$x=0$ 为瑕点. 但是当 $0<x\leqslant1$ 时，被积函数 $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\leqslant 0$，不是非负函数，因而我们转而考虑积分

$$\int_0^1\frac{(-\ln x)}{\sqrt{x}}dx,\tag{7}$$

其被积函数 $\frac{(-\ln x)}{\sqrt{x}}\geqslant 0$, 是非负函数. 由于

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{(-\ln x)}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-\ln x)}{x^{-\frac{1}{4}}}$$

$$\xlongequal{\text{由洛比达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}}=\lim_{x\to 0}4\cdot x^{\frac{1}{4}}=0,$$

因此由定理 4′ 之②, 知积分(7)收敛. 再根据瑕积分性质 2, 知原来积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 也收敛.

其实, 在证明积分(7)收敛时, 不一定非取 $\alpha=\frac{3}{4}$ 不可, 只要取 α 满足不等式

$$\frac{1}{2}<\alpha<1,$$

就有
$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\cdot\frac{(-\ln x)}{\sqrt{x}}=0,$$
从而积分(7)收敛.

更一般地, 有结论: 瑕积分

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^{\lambda}}dx. \tag{8}$$

当 $\lambda<1$ 时收敛, 当 $\lambda\geqslant 1$ 时发散.

事实上, 我们可以考虑非负函数的积分

$$\int_0^1\frac{(-\ln x)}{x^{\lambda}}dx. \tag{9}$$

① 当 $\lambda<1$ 时, 取

$$\lambda<\alpha<1,$$

则 $\alpha-\lambda>0$, 从而

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\cdot\frac{(-\ln x)}{x^{\lambda}}=\lim_{x\to 0}\frac{(-\ln x)}{x^{-(\alpha-\lambda)}}$$

$$\underline{\underline{\text{由洛比达法则}}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{x}}{-(\alpha-\lambda)x^{-(\alpha-\lambda)-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\alpha-\lambda)}x^{\alpha-\lambda}=0.$$

由定理 4′ 之②，知积分$\int_0^1\frac{(-\ln x)}{x^{\lambda}}dx$ 从而$\int_0^1\frac{\ln x}{x^{\lambda}}dx$ 收敛.

② 当 $\lambda\geqslant 1$，取 $\alpha=\lambda$，则 $\alpha\geqslant 1$，并且

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\cdot\frac{(-\ln x)}{x^{\lambda}}=\lim_{x\to 0}(-\ln x)=+\infty.$$

由定理 4′之③，知积分$\int_0^1\frac{(-\ln x)}{x^{\lambda}}dx$ 从而 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^{\lambda}}dx$ 发散.

【例 9】 讨论积分$\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}dx$ 的收敛性.

解：瑕点为 $x=0$. 被积函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}.$$

由洛比达法则，知 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=2$，因此，取 $\alpha=\frac{2}{3}$，便有

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\cdot f(x)=\lim_{x\to 0} x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

于是由定理 4′ 之①知积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}dx$ 收敛.

【例 10】 讨论积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$ 的收敛性.

解：瑕点为 $x=0$. 当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\ln(\sin x)\leqslant 0$. 考虑积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\ln(\sin x)]dx. \tag{10}$$

取 $\alpha=\frac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot[-\ln(\sin x)] &= -\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(\sin x)\\ &=-\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\sqrt{\sin x}\ln(\sin x)\\ &=-\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\sin^{\frac{1}{2}}x\cdot\ln(\sin x)\\ &=-1\cdot0=0.\end{aligned}$$

由定理 4′ 之②知积分(10)收敛，从而原来积分收敛.

以上我们讨论了无穷积分与瑕积分，它们统称为广义积分.

有时，我们还会碰到这样的广义积分：积分区间既是无穷的，被积函数又有瑕点. 这时，我们往往把积分拆成几项，使每一项只是单纯的无穷积分或瑕积分，然后逐项考虑.

【例 11】 讨论第二型欧拉(Euler)积分

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx \tag{11}$$

的收敛性.

解：① 当 $\alpha-1\geqslant0$，即 $\alpha\geqslant1$ 时，积分(11)是一个单纯的无穷积分，被积函数无瑕点. 由第一节例 15，知 $\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 对任意固定的 $\alpha-1\geqslant0$（从而 $\alpha\geqslant1$）都是收敛的，因此，积分(11)也收敛(无穷积分性质 1).

② 当 $\alpha-1<0$，即 $\alpha<1$ 时，被积函数 $x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}$ 有一个瑕

点 $x=0$. 我们将积分(11)拆成两项, 使得一项是单纯的瑕积分,另一项是单纯的无穷积分:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx.$$

右端第二项对任意 $\alpha-1$, 从而对任意 α 都是收敛的(第一节例 15), 因此,只需讨论第一项

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx. \tag{12}$$

由 $\alpha-1<0$, $1-\alpha>0$, $x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}=\frac{1}{x^{1-\alpha}}\cdot e^{-x}$, 知当 $x\to 0$ 时,有

$$\lim_{x\to 0} x^{1-\alpha}\cdot f(x)=\lim_{x\to 0} x^{1-\alpha}\cdot \frac{1}{x^{1-\alpha}}\cdot e^{-x}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{-x}=1.$$

即被积函数 $f(x)=x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}$ 当 $x\to 0$ 时是关于 $\frac{1}{x}$ 的 $(1-\alpha)$ 级无穷大. 于是由定理 4′ 之①知:

当 $(1-\alpha)<1$ 即 $\alpha>0$ 时,积分(12)收敛;

当 $(1-\alpha)\geqslant 1$ 即 $\alpha\leqslant 0$ 时,积分(12)发散.

综合①, ②, 知第二型欧拉积分(11)当 $\alpha>0$ 时收敛, 当 $\alpha\leqslant 0$ 时发散. 在收敛的情形, 积分 $\Gamma(\alpha)$ 确定出 Γ(读作"伽马")函数,这是一个非初等函数.

【例 12】 讨论第一型欧拉积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{13}$$

的收敛性.

解: 当 $p-1\geqslant 0$, $q-1\geqslant 0$ 即

$$p\geqslant 1,\quad q\geqslant 1$$

时,被积函数 $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,积分(13)是个普通的定积分.

当 $p-1<0$，或 $q-1<0$ 即

$$p<1 \quad 或 \quad q<1$$

时，$x=0$ 或 $x=1$ 是瑕点，积分(13)是瑕积分．我们将积分(13)拆成两项，例如：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$=I_1+I_2.$$

① 对积分 I_1 来说，$x=0$ 是被积函数 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}=\frac{(1-x)^{q-1}}{x^{(1-p)}}$ 的瑕点，当 $x\to0$ 时，显然有

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-x)^{q-1}}{x^{(1-p)}}\Big/\left(\frac{1}{x}\right)^{1-p}=\lim_{x\to0}(1-x)^{q-1}=1,$$

即被积函数当 $x\to0$ 时是关于 $\frac{1}{x}$ 的 $(1-p)$ 级无穷大，因此，由定理 4′ 之①，知：

当 $1-p<1$ 即 $p>0$ 时，积分 I_1 收敛；

当 $1-p\geqslant1$ 即 $p\leqslant0$ 时，积分 I_1 发散．

② 对积分 I_2 来说，$x=1$ 是被积函数

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}=\frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}$$

的瑕点，当 $x\to1$ 时，$\frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}$ 是关于 $\frac{1}{1-x}$ 的 $(1-q)$ 级无穷大，因此

当 $1-q<1$ 即 $q>0$ 时，I_2 收敛；

当 $1-q\geqslant1$ 即 $q\leqslant0$ 时，I_2 发散．

综合①，②，知：第一型欧拉积分(13)在 $p>0$ 并且 $q>0$ 时收敛，在其它情形发散．在收敛的情形，积分 $B(p,q)$ 确定

出 B (读作"贝塔")函数，这是一个二元的非初等函数.

Γ 函数与 B 函数是两个很重要的非初等函数，在数理方程、概率论等方面以及许多应用中，它们起着相当大的作用. 关于它们的许多重要性质及应用，这里就不讨论了.

习 题 二

1. 求下列瑕积分的值:

(1) $\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$; (2) $\int_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

(3) $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; (4) $\int_{1}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$;

(5) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; (6) $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

(7) $\int_{a}^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\quad(a<b)$;

(8) $\int_{a}^{b}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\quad(a<b)$.

2. 讨论下列积分的收敛性:

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$; (2) $\int_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(3) $\int_{0}^{1}x\ln x\,dx$; (4) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$;

(5) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x+1)}}$; (6) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-8}}$;

(7) $\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$; (8) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$;

(9) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\operatorname{ctg}x\,dx$; (10) $\int_{-2}^{2}\frac{xdx}{x^2-1}$;

(11) $\int_{0}^{1}\frac{1}{e^x-1}dx$.

3. 求广义积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ 的值.

4. 讨论下列积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$;　　　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{1+x}dx$.

5. 证明第二节中瑕积分的几个简单性质.

6. 证明第二节中瑕积分的几个收敛性判别法.

7. 设函数 $f(x)$ 定义在有限区间$[a, b]$上,但 $f(x)$ 在其上有若干个瑕点,若$\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛,则称 $f(x)$ 是平方收敛(或平方可积)的.

　证明: 若 $f(x)$ 在$[a, b]$上平方收敛,则必收敛.

但反过来不一定对,试考虑积分

$$\int_0^1\frac{1}{x^{2/8}}dx.$$

8. 证明:若 $f(x)$, $g(x)$ 在$[a, b]$上平方收敛,则其和$[f(x)+g(x)]$在$[a, b]$上亦平方收敛,并且其积 $f(x)\cdot g(x)$在$[a, b]$上收敛.

9. 求由 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 及 $x=1$, x 轴, y 轴所围成的面积(图 5-6).

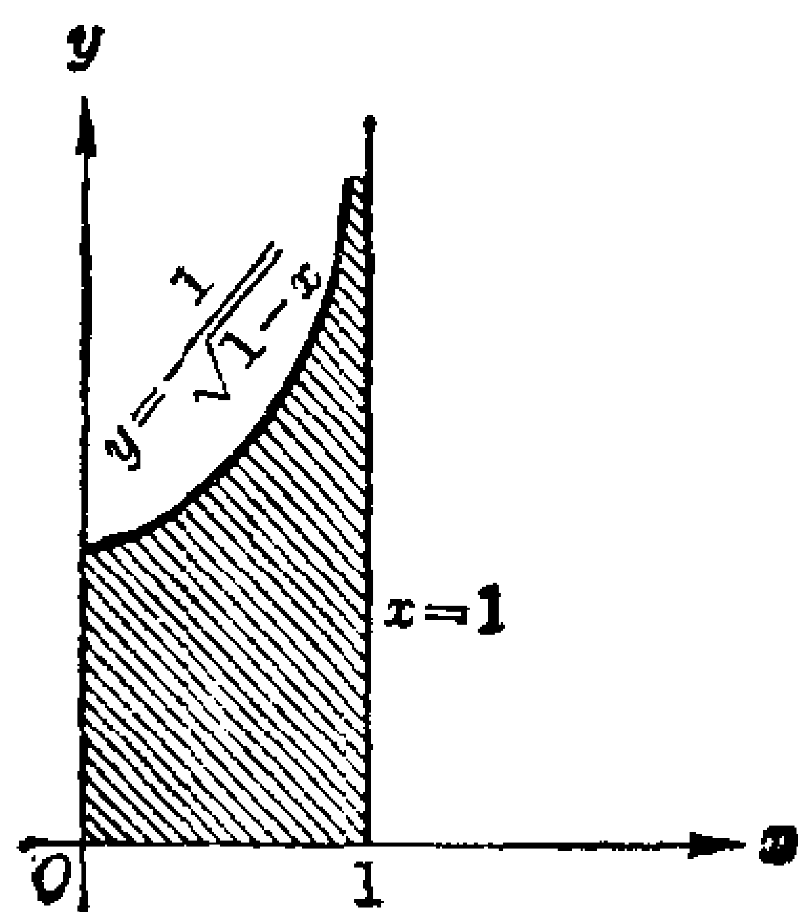


图 5-6

第五章小结

本章讨论了广义积分(包括无穷积分与瑕积分)收敛性的定义、简单性质以及一些收敛性判别法.

在讲收敛性判别法时，我们着重介绍了柯西收敛原理和关于非负被积函数的广义积分的比较判别法(有几种形式)．利用比较判别法，可以讨论非负被积函数的广义积分的收敛性以及一般被积函数的广义积分的绝对收敛性．

关于一般的被积函数（不一定是非负函数）的广义积分，还有两个常用的收敛性判别法：阿贝耳(Abel)判别法和狄利克雷(Dirichlet)判别法．它们是建立在积分学第二中值定理之上的．利用这两个判别法，可以判别一些广义积分的条件收敛性．关于这部分内容，由于篇幅关系，本书不再作介绍．读者若有兴趣，可参阅一般综合性大学数学系的有关教科书．

附录　简单积分表

一、含有 $a+bx$ 的积分

1. $\int \frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln(a+bx)+C$

2. $\int (a+bx)^{\mu}dx=\frac{(a+bx)^{\mu+1}}{b(\mu+1)}+C \quad (\mu\neq-1)$

3. $\int \frac{x\,dx}{a+bx}=\frac{1}{b^2}[a+bx-a\ln(a+bx)]+C$

4. $\int \frac{x^2dx}{a+bx}=\frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2-2a(a+bx)+a^2\ln(a+bx)\right]+C$

5. $\int \frac{dx}{x(a+bx)}=-\frac{1}{a}\ln\frac{a+bx}{x}+C$

6. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)}=-\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\ln\frac{a+bx}{x}+C$

7. $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^2}\left[\ln(a+bx)+\frac{a}{a+bx}\right]+C$

8. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\ln(a+bx)-\frac{a^2}{a+bx}\right]+C$

9. $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2}=\frac{1}{a(a+bx)}-\frac{1}{a^2}\ln\frac{a+bx}{x}+C$

10. $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3}=\frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx}+\frac{a}{2(a+bx)^2}\right]+C$

二、含有 $\sqrt{a+bx}$ 的积分

11. $\int \sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}+C$

12. $\int x\sqrt{a+bx}\,dx=-\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}+C$

13. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3}+C$

14. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}=-\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}+C$

15. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+C$

16. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C\quad(a>0)$

17. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C\quad(a<0)$

18. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

19. $\int\frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

三、含有 $a^2\pm x^2$ 的积分

20. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C$

21. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$

22. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C\quad(|x|<a)$

23. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C\quad(|x|>a)$

四、含有 $a\pm bx^2$ 的积分

24. $\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b}{a}}x+C\quad(a>0,\ b>0)$

25. $\int\frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}x}+C$

26. $\int\frac{x\,dx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\ln(a+bx^2)+C$

27. $\int \frac{x^2 dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+bx^2}$

28. $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x^2}{a+bx^2} + C$

29. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+bx^2}$

30. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+bx^2}$

五、含有$\sqrt{x^2+a^2}$的积分

31. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

32. $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}$

$$+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

33. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3} + C$

34. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}$

$$-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$

37. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C$

38. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

39. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

40. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}} + C$

41. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$

42. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C$

43. $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x}=\sqrt{x^2+a^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C$

44. $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

六、含有$\sqrt{x^2-a^2}$的积分

45. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

46. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$

47. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}+C$

48. $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

49. $\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}$

$$+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

50. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3}+C$

51. $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5}+C$

52. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}$

$$-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

53. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

54. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arccos\frac{1}{x} + C$

56. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + C$

57. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

58. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x} + C$

59. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C$

60. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$

七、含有$\sqrt{a^2-x^2}$的积分

61. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

63. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

64. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

65. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$

66. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

67. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

68. $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C$

69. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3} + C$

70. $\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5}+C$

71. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

72. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

73. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C$

74. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

75. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C$

76. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C$

77. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

八、含有 $a+bx\pm cx^2\,(c>0)$ 的积分

78. $\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}}\ln\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}+C$

79. $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C & (b^2<4ac) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C & (b^2>4ac) \end{cases}$$

九、含有 $\sqrt{a+bx\pm cx^2}\,(c>0)$ 的积分

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C$

81. $$\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,dx = \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}}\ln(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C$$

82. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

$$=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\ln(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C$$

83. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

84. $\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx$

$$=\frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$$

85. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=-\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}+\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

十、含有$\sqrt{\frac{a\pm x}{b\pm x}}$的积分、含有$\sqrt{(x-a)(b-x)}$的积分

86. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx=\sqrt{(a+x)(b+x)}+(a-b)\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x})+C$

87. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx=\sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}+C$

88. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+C$

89. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$

90. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$

十一、含有三角函数的积分

91. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

92. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

93. $\int \operatorname{tg} x\,dx=-\ln\cos x+C$

94. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \sin x + C$

95. $\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$

96. $\int \csc x\,dx = \ln(\csc x - \operatorname{ctg} x) + C = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$

97. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$

98. $\int \csc^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$

99. $\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$

100. $\int \csc x \operatorname{ctg} x\,dx = -\csc x + C$

101. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

102. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

103. $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$

104. $\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

105. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

106. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

107. $\int \sin x \cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$

108. $\int \sin^n x \cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$

109. $\int \cos^m x \sin^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\,dx$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n}$$

$$+ \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l}110.\ \int \sin mx \cos nx\, dx = -\dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C \\ 111.\ \int \sin mx \sin nx\, dx = -\dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \\ 112.\ \int \cos mx \cos nx\, dx = \dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \end{array}\right\} m \neq n$$

113. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C \quad (a>b)$$

114. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} + C \quad (a<b)$$

115. $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a>b)$$

116. $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}} + C \quad (a<b)$$

117. $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b\operatorname{tg} x}{a}\right) + C$$

118. $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{b\operatorname{tg} x + a}{b\operatorname{tg} x - a} + C$$

十二、含有反三角函数的积分

119. $$\int \arcsin\frac{x}{a}\, dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$$

120. $$\int x\arcsin\frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

121. $$\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$$

122. $$\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}\, dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$$

123. $\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

124. $\int x\arccos\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

125. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

126. $\int \frac{\arccos\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

127. $\int \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$

128. $\int x\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C$

129. $\int x^2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2) + C$

130. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2} + C$

131. $\int \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$

132. $\int x\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2} + C$

133. $\int x^2\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2) + C$

134. $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2} + C$

十三、含有指数函数的积分

135. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

136. $\int e^x\,dx = e^x + C$

137. $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

138. $\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$

139. $\int e^{ax} \sin nx\,dx = \frac{e^{ax}(a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C$

140. $\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C$

141. $\int e^{ax} \cos nx\,dx = \frac{e^{ax}(n \sin nx + a \cos nx)}{a^2 + n^2} + C$

142. $\int x e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

143. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx$

144. $\int x\,a^{mx}\,dx = \frac{x\,a^{mx}}{m \ln a} - \frac{a^{mx}}{(m \ln a)^2} + C$

145. $\int x^n a^{mx}\,dx = \frac{a^{mx} x^n}{m \ln a} - \frac{n}{m \ln a}\int x^{n-1} a^{mx}\,dx$

146. $\int e^{ax} \sin^n x\,dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2 + n^2}(a \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2}\int e^{ax} \sin^{n-2} x\,dx$

147. $\int e^{ax} \cos^n x\,dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x(a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2}\int e^{ax} \cos^{n-2} x\,dx$

十四、含有对数函数的积分

148. $\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C$

149. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + C$

150. $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$

151. $\int \ln^n x\,dx = x \ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx$

152. $\int x^m \ln^n x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x\,dx$

十五、含有双曲函数的积分

153. $\int \text{sh}\, x\, dx = \text{ch}\, x + C$

154. $\int \text{ch}\, x\, dx = \text{sh}\, x + C$

155. $\int \text{th}\, x\, dx = \ln \text{ch}\, x + C$

156. $\int \text{sh}^2 x\, dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \text{sh}\, 2x + C$

157. $\int \text{ch}^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \text{sh}\, 2x + C$

十六、定　积　分

158. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0$

159. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0$

160. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$

161. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$

162. $\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \int_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$

163. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \begin{cases} I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & (n\text{为奇数}),\ I_1 = 1 \\ I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n\text{为偶数}),\ I_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

164. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^n x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2m}{(n+1)(n+3) \cdot \cdots \cdot (n+2m+1)}$

165. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2m+2n)} \frac{\pi}{2}$

习题答案或提示

第 一 章

习题一 **1.** (1) $-\cos x+C$; (2) e^x+C; (3) $\frac{1}{5}x^5+C$;
(4) $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$; (5) $2\sqrt{x}+C$; (6) $-\frac{1}{x}+C$; (7) $\operatorname{tg} x+C$;
(8) $\operatorname{arc\,tg} x+C$.
2. $y=x^2-1$.

习题二 **1.** $2x^2+C$. **2.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2}+C$. **3.** $\frac{a}{3b}y^3+C$.
4. $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+C$. **5.** $a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C$.
6. $\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h}+C$. **7.** $\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{6}{5}x^{5/2}+2x^{3/2}-2\sqrt{x}+C$.
8. $\frac{x^3}{6}+\frac{2}{x}+C$. **9.** $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{x^4}{4}+C$. **10.** $3e^t-\frac{3}{4}t^{4/3}+C$.
11. $-\operatorname{ctg} x+\cos x+C$. **12.** $x-\sin x+C$. **13.** $-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+C$.
14. $x+\operatorname{arc\,tg} x+C$. **15.** $-\operatorname{ctg} x-x+C$. **16.** $3\operatorname{tg} x-x+C$.
17. $\frac{1}{1+\ln 3}3^x\cdot e^x+C$. **18.** $-\frac{1}{x}-\operatorname{arc\,tg} x+C$.
[提示: $1=(1+x^2)-x^2$.] **19.** $-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\operatorname{arc\,tg} x+C$.
[提示: $\frac{1}{x^6+x^4}=\frac{1}{x^4(x^2+1)}=\frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(x^2+1)}$.]

习题三 **1.** (1) 3; (2) $-\frac{1}{2}$; (3) $\frac{1}{a}$ $(a\neq 0)$; (4) $\frac{1}{2}$;
(5) $-\frac{1}{9}$; (6) 2; (7) $-\frac{1}{4}$; (8) $\frac{1}{3}$; (9) 3; (10) $-\frac{1}{2}$.
2. (1) $\frac{1}{k}e^{kx}$; (2) $\frac{1}{2}x^2$; (3) $\frac{1}{3}x^3$; (4) $-\frac{1}{x}$; (5) $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$;

(6) $\ln x$;　(7) $\operatorname{arctg} x$;　(8) $\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$;　(9) $\sqrt{x^2+a^2}$;

(10) $\frac{1}{2}\sin^2 x$.

3. 除第(5),(6)两题外,都是错的. 读者可自己分析错误的原因.

4. (1) $\operatorname{ch} x+C$;　(2) $\operatorname{sh} x+C$;　(3) $\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 x+C$;

(4) $-\frac{1}{2}\ln|3-2x|+C$;　(5) $\frac{1}{303}(3x+5)^{101}+C$;　(6) $-4e^{-\frac{x}{4}x}+C$;

(7) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(1+2y)^2}+C$;　(8) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x+\theta)+C$;

(9) $-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+C$;　(10) $\begin{cases}\frac{1}{b(k+1)}(a+bx)^{k+1}+C, & k\neq -1;\\ \frac{1}{b}\ln|a+bx|+C, & k=-1;\end{cases}$

(11) $-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x|+C$;　(12) $\frac{1}{2}t-\frac{1}{4\omega}\sin 2(\omega t+\varphi)+C$;

(13) $ae^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{b}\sin bx+x+C$;　(14) $\frac{k}{b(n+1)}\ln|a+bt^{n+1}|+C$;

(15) $\frac{1}{6}(\sin 3x)^2+C$;　(16) $x+3\ln|x-1|+C$;

(17) $\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}\ln|a+bx|+C$;　(18) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$;

[提示: $\int\frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+3)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$.]

(19) $\frac{x^2}{2}+3x+5\ln|x-3|+C$;　(20) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$;

(21) $\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{12}-\frac{x}{6}+\frac{1}{6}\ln|1+x|+C$;　(22) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$;

(23) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}+C$;　(24) $\frac{1}{2}e^{x^2-2x}+C$;

(25) $\frac{3}{4}(x^2+2x)^{2/3}+C$;　(26) $\ln|x^2-3x+8|+C$;

(27) $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}+C$;　[提示: 将被积函数的分母有理化.]

(28) $\frac{4}{15}(1+x^3)^{5/4}+C$;　(29) $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^3}{2}+C$;

(30) $-\frac{1}{4}\ln|2-x^4|+C$;　(31) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^2}{\sqrt{2}-x^2}\right|+C$;

(32) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C$;　[提示: $\int\frac{1}{x(x^6+4)}dx$ $=\frac{1}{4}\int\frac{(x^6+4)-x^6}{x(x^6+4)}dx$.]　(33) $4\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x+C$;

(34) $\arcsin\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$;　(35) $\frac{1}{2}\ln|\ln^2 x-1|+C$;

(36) $-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)+C$;　[提示: $\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $x(x+1)=x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$.]　(37) $-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}+C$;　(38) $\frac{1}{3}e^{\left(1-\frac{3}{x}\right)}+C$;

(39) $-\frac{4}{3}(1-\sqrt{x})^{3/2}+C$;　(40) $-2\ln|\cos\sqrt{x}|+C$;

(41) $\frac{1}{4}(2x^{3/2}-1)^{4/3}+C$;　(42) $-\frac{3}{4}(1-e^x)^{4/3}+C$;

(43) $\ln(1+e^x)+C$;　(44) $\operatorname{arc\,tg}(e^x)+C$;　(45) $x-\ln(1+e^x)+C$;

(46) $-x+2\ln(1+e^x)+C$;　(47) $e^{e^x}+C$;　(48) $-\frac{1}{e^{\sin x}}+C$;

(49) $2\sqrt{\operatorname{tg} x}+C$;　(50) $\frac{1}{1-\operatorname{tg} x}+C$;　(51) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos 2x}+C$;

(52) $-\frac{1}{a}\ln|b-\sin ax|+C$;　(53) $\sin x-\operatorname{arc\,tg}(\sin x)+C$;

(54) $\frac{2}{3}(\operatorname{arc\,tg} x)^{3/2}+C$;　(55) $\frac{1}{1-\arcsin x}+C$;

(56) $4x-2\ln|\sec 2x+\operatorname{tg} 2x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x+C$;

(57) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C$;　(58) $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|+C$;　[提示: 利用半角公式 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.]

(59) $\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}+C$;　(60) $x-\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos x}+C$;

(61) $-\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}+C$;　(62) $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C$;

(63) $\ln|\cos x+\sin x|+C$; [提示: $(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$.]

(64) $-\frac{1}{e^x-\cos x}+C$;　(65) $\ln|\cos x+\sin x|+C$;

(66) $\frac{1}{\cos x}+\cos x+C$;　(67) $\frac{7}{10}\sin^{10/7}x-\frac{7}{24}\sin^{24/7}x+C$;

(68) $\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}+\ln|\cos x|+C$;　(69) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C$;

(70) $\ln|\cos 2x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x+C$;

(71) $2\sin^{1/2}\varphi-\frac{4}{5}\sin^{5/2}\varphi+\frac{2}{9}\sin^{9/2}\varphi+C$;

(72) $\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x+C$;　(73) $\operatorname{arc\,tg}(\sin^2 x)+C$;

(74) $-\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin x}{2}+C$;　(75) $-\frac{\cos 5x}{10}+\frac{\cos x}{2}+C$;

(76) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C$;

(77) $-\frac{1}{4}\cos(2x+a)-\frac{\sin a}{2}\cdot x+C$;

(78) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)+C$;

(79) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

$\left[\text{提示: } \frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)\sin^2 x},\ \frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg}^2 x+1.\right]$

(80) $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

(81) $$\begin{cases} \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2-b^2}}+C, & \text{当}|a|>|b|; \\ -\frac{1}{a^2}\operatorname{ctg} x+C, & \text{当}|a|=|b|; \\ \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-a^2}-a\operatorname{tg} x}{\sqrt{b^2-a^2}+a\operatorname{tg} x}\right|+C, & \text{当}|a|<|b|; \end{cases}$$

(82) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+C$;　(83) $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}t}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}t}\right|+C$;

(84) $\frac{1}{6}\ln\frac{3+\sin\theta}{3-\sin\theta}+C$;　(85) $\frac{1}{m}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+n}{m}\right)+C$;

(86) $\frac{1}{2}\arcsin(2x)+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$;

(87) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C$;　(88) $\arcsin\frac{x-1}{2}+C$;

(89) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+C$;

(90) $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$;　(91) $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}}+C$.

习题四　1. (1) $\frac{3}{2}x^{2/3}-3x^{1/3}+3\ln|1+x^{1/3}|+C$;

(2) $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x+1}+C$;　(3) $-\frac{3}{10}(3+2x)(1-x)^{2/3}+C$;

(4) $\frac{6}{5}[\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|]+C$;

(5) $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$;

(6) $\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C$;

(7) $\sqrt{a^2-x^2}+a\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$;

(8) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$;

(9) $-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$;

(10) $-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}+C$;

(11) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}+C$;

2. (1) $-\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$;　(2) $\frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C$;

(3) $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$;　(4) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$.

3. $\arccos\frac{1}{x}+C$, 或 $-\arcsin\frac{1}{x}+C$, 或 $-\arcsin x+C$,

或 $2\operatorname{arc\,tg}(x+\sqrt{x^2-1})+C$, 或 $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}+C$.

4. $-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$;

5. (1) $-\frac{1}{11(x-1)^{11}}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{1}{8(x-1)^8}+C$;

[提示: 令 $x-1=t$, 即 $x=t+1$.]

(2) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$;　[提示: 令 $\sqrt{1+e^x}=t$.]

(3) $\frac{4}{21}(3e^x-4)(e^x+1)^{3/4}+C$.　[提示: 令 $\sqrt[4]{e^x+1}=t$.]

6. (1) $\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+6})+C$;

(2) $\frac{1}{2}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}|+C$;　(3) $\arcsin\frac{x-1}{2}+C$;

(4) $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C$;

(5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{3}{x}+1+\frac{1}{x}\sqrt{9+6x+3x^2}\right|+C$;

(6) $-\frac{1}{2}\arcsin\frac{8-3x}{5x}+C$;

(7) $\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{2}(x-1)}+C$　$(|x|>\sqrt{2})$;

(8) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right|+C$;

(9) $\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)-\frac{1-2\sqrt{x-x^2}}{2(2x-1)}+C$.

习题五　**1**. (1) $-x\cos x+\sin x+C$;　(2) $\frac{x}{3}\sin 3x+\frac{\cos 3x}{9}+C$;

(3) $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+C$;　(4) $-xe^{-x}-e^{-x}+C$;

(5) $(x-2)e^{x}+C$;　(6) $-(x^2+3x+3)\cdot e^{-x}+C$;

(7) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$;　(8) $\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$;

(9) $-\frac{1}{x}\arcsin x+\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$;

(10) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}\operatorname{arc\,tg}x+C$;

(11) $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\right)\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{6}+C$;

[提示：可利用习题三第4题(21)的结果.]

(12) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$;　(13) $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$;

(14) $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C$;

(15) $-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\ln|\csc x-\operatorname{ctg}x|+C$;

(16) $\frac{e^x}{2}\left[1-\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{5}\right]+C$;

(17) $\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2x}{9}e^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C$;

(18) $\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx+C$;

(19) $\frac{x^3}{6}+\frac{1}{8}(2x^2-1)\cdot\sin 2x+\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}+C$;

(20) $\frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$;

(21) $(x^2+2)\operatorname{ch}x-2x\operatorname{sh}x+C$;

(22) $\frac{2}{3}x^{3/2}\left[\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right]+C$;

(23) $-\frac{1}{2x^2}\left[\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right]+C$;

(24) $\frac{x-2}{x+2}e^x+C$;　[提示：$\int\frac{x^2e^x\,dx}{(x+2)^2}=\int x^2e^x\,d\left(\frac{-1}{x+2}\right)$.]

(25) $\frac{e^x}{x+1}+C$.

2. (1) $x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

(2) $(x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$;

(3) $x\ln^2 x-2x(\ln x-1)+C$;

(4) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$;

(5) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;

(6) $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$.

3. (1) $[\ln(\ln x)-1]\ln x+C$;   (2) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$;

(3) $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}+C$;

(4) $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$;

$\left[\text{提示: }\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}dx=\int\arccos x\,d[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}].\right]$

(5) $x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2+C$;

$\left[\text{提示: }\int\frac{x^2\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\operatorname{arc\,tg}x\,dx.\right]$

(6) $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2-x\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

(7) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\ln\sqrt{1-x^2}+C$;   (8) $\frac{1}{2}(\ln\operatorname{tg}x)^2+C$;

(9) $(\ln(\operatorname{tg}x)-1)\cdot\operatorname{tg}x+(\ln(\operatorname{ctg}x)-1)\cdot\operatorname{ctg}x+C$.

$\left[\text{提示: }\int\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\ln(\operatorname{tg}x)\,dx.\right]$

4. $\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{e^x}{2}\cos x+C$.

5. 73.74 公里(不计空气阻力).

习题六 **1**. $y=\arcsin\frac{x-1}{2}+\frac{\pi}{6}$.

[提示: 可利用习题四第 6 题(3)的结果.]

2. $s=(t-2)e^t+3$. [提示: 参见习题五第 1 题之(5).]

3. (1) $y=\frac{10^x}{\ln 10}+\left(1-\frac{1}{\ln 10}\right)$;   (2) $u=\frac{E}{\omega}[\sin(\omega t+\varphi)-\sin\varphi]$;

(3) $y=\ln|x|+\frac{x^3}{3}+\frac{7}{3}$;   (4) $y=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-2x+\frac{9}{2}, & x\geqslant 2,\\ 2x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & x<2.\end{cases}$

第　二　章

习题一　**1.** (1) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$;

(2) $-x-2\ln|1-x|+C$;

(3) $-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$;　　(4) $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{2}+C$;

(5) $x+2\ln(x^2+2)+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$;

(6) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$;

(7) $\frac{5}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

(8) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C$;　　(9) $\ln\frac{x^2+2}{x^2+3}+C$.

2. (1) $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$;　　(2) $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C$;

(3) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-5|^5}{(x-2)^2}+C$;　　(4) $\ln(x+2)^2-\frac{1}{2}\ln|(x+1)(x+3)^3|+C$;

(5) $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C$;　　(6) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+C$;

(7) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$;

(8) $\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{2(x+1)}+C$;

(9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^3-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

(10) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{16}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+C$;

(11) $x-\frac{8}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x+C$;

(12) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

(13) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$;

(14) $-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

(15) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}[\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x+1)$
$+\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x-1)]+C$; [提示: $x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2$.]

(16) $\frac{1}{20}\ln\frac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C$;

(17) $-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$;

(18) $\frac{1}{2}\ln|(x^2-2x+5)^3|-\ln|x-1|+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C$;

(19) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$;

(20) $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C$;

(21) $-\frac{1}{2(x^2+1)}+\ln\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}+C$;

(22) $\ln|x|(x^2+1)-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$.

习题二 1. (1) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$;

(2) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$; (3) $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$;

(4) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C$; (5) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$;

(6) $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C$;

(7) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg} x\right)+C$;

(8) $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)+C$; (9) $2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$;

(10) $\frac{1}{2}[\ln|\cos x+\sin x|+x]+C;$

(11) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C;$

(12) $\frac{\cos x(\cos x-\sin x)}{4}-\frac{1}{4}\ln|\cos x-\sin x|+C;$

(13) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}+C;$

(14) $-\frac{1}{2\operatorname{tg} x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+C.$

2. (1) $-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x-\frac{4}{15}\cos x\cdot(\sin^2 x+2)+C;$

(2) $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C;$

(3) $\frac{3}{128}x+\frac{1}{1024}\sin 8x-\frac{1}{128}\sin 4x+C;$

(4) $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^2 x)+C;$ (5) $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C;$

(6) $\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{3}{16}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C;$

(7) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos 2x}{3+\cos 2x}\right|+C;$

(8) $\ln|\cos x|-\frac{1}{2}\ln|2\cos^2 x-1|+C;$

(9) $\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\ln|4\sin^2 x-1|+C;$

(10) $\frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg} x-1|-\frac{1}{6}\ln(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{3}}+C.$

习题三 1. (1) $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C;$

(2) $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C;$

(3) $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C;$

(4) $6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)+C$;

(5) $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$;

(6) $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x+1}+C$;　　(7) $\frac{1}{15}\sqrt[3]{(1-3x)^5}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{(1-3x)^2}+C$;

(8) $\frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}}+C$;　　(9) $\frac{2}{15}\sqrt{a+t}\,(3t^2+at-2a^2)+C$;

(10) $x-4\sqrt{1+x}+\ln(\sqrt{1+x}+1)^4+C$;

(11) $\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)$

$$-\frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C,$$　　其中 $t=\sqrt[3]{2+x}$;

(12) $6t-3t^2-2t^3+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{7}t^7+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arc\,tg}t+C$,

其中 $t=\sqrt[6]{x+1}$;

(13) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$;

(14) $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$;

(15) $\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}+C$;

(16) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$;　[提示：先把积分化一下：

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}\sqrt[3]{(x-1)^3}}$$

$$=\int\frac{x+1}{(x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}(x-1)}dx$$

$$=\int\frac{\sqrt[3]{(x+1)^3}}{(x^2-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}dx=\int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx,$$

再令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$.]

(17) $-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C$;

[提示: $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}\,dx$,

令 $\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}=t$.]

(18) $-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}t+t^2}{1-\sqrt{2}t+t^2}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1-t^2}{\sqrt{2}t}+C$,

其中 $t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$.

[提示: $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=\int\frac{\sqrt[4]{x^4}\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=\int\sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}\,dx$, 令 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}=t$.]

2 (1) $\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}\right|+C$;

(2) $\ln|\sqrt{x^2+4x+1}+x+2|+C$;

(3) $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{-2x^2+4x-1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}(x-1)+C$;

(4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3-x+\sqrt{3x^2-6x+9}}{x}\right|+C$;

(5) $-\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}}+C$;

(6) $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arc\,tg}z+C$, 其中 $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

第 三 章

习题一 4. $8\frac{2}{3}$. 5. $\frac{25}{2}g$. 6. $m=\int_0^l\rho(x)\,dx$.

习题二 1. (1) $\int_0^1 x\,dx>\int_0^1 x^2\,dx>\int_0^1 x^3\,dx$;

(2) $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx>\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx>\int_0^{\pi/2}\sin^{10}x\,dx$;

(3) $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx<\int_0^{\pi/2}x\,dx$;　(4) $\int_0^1 e^{-x}\,dx<\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$;

(5) $\int_3^4\ln x\,dx<\int_3^4\ln^2 x\,dx$;　(6) $\int_1^2\ln x\,dx>\int_1^2\ln^2 x\,dx$.

3. 提示：利用不等式

$$[|f(x)|-|g(x)|]^2\geqslant 0.$$

这里还要用到乘积 $f(x)\cdot g(x)$ 的可积性，这是可以从 $f(x)$，$g(x)$ 的可积性来加以证明的．不过，证明时要用到函数可积的充要条件，因此从略．

4. (1) $6\leqslant\int_1^4(x^2+1)dx\leqslant 51$;　(2) $\pi\leqslant\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\leqslant\sqrt{2}\pi$;

(3) $\frac{1}{e}\leqslant\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\leqslant 1$.

7. $\frac{1}{2}$.

8. 提示：按定积分的定义证．只需考查极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}[g(\xi_1)\cdot\Delta x_1+g(\xi_n)\cdot\Delta x_n]+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=2}^{n-1}g(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

本题是一个重要的结果．

9. $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n}$.

10. 提示：利用闭区间上连续函数的性质：若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，又 $f(x_0)>0$，则存在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，在此邻域内 $f(x)>0$.

11. 提示：用反证法：若 $f(x)\neq 0$，则在 $[a,\ b]$ 上至少存在一点 x_0，使得

$$f(x_0)\neq 0.$$

从而

$$f^2(x_0)>0.$$

再利用第 10 题结果，即可得证．

习题三　1. (1) $b-a$;　(2) $\frac{1}{3}(b^3-a^3)$;　(3) $\frac{1}{4}(b^4-a^4)$;

(4) $2(\sqrt{2}-1)$;　(5) $\frac{2}{5}$;　(6) $a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right)$;　(7) 1;　(8) $\frac{\pi}{6}$;

(9) $\frac{\pi}{3}$;　(10) $\frac{8}{3}-\ln 3$;　(11) $\frac{1}{4}$;　(12) $\frac{\pi}{4}$;　(13) $\frac{\pi}{4}$;　(14) 0;

(15) $1-\frac{\pi}{4}$; (16) $1-\frac{\pi}{4}$; (17) $\frac{2\sqrt{5}}{3}(1+4\sqrt{2})$; (18) $\frac{\pi a^2}{4}$;

(19) $\frac{3}{16}$; (20) $\frac{3}{2}$; (21) $\frac{\pi}{2}$; (22) $2\ln 2-\ln 3$; (23) 12;

(24) $\frac{\pi^2}{4}$; (25) 1; (26) $\frac{5}{2}$; (27) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$; (28) $\frac{4}{3}$.

2. (1) $\frac{8}{3}$; (2) $\frac{8}{3}$; (3) $\frac{1}{2}$.

3. (1) $\frac{1}{3}$; (2) 10; (3) $\frac{1}{2}\cos\varphi$; [提示：利用积化和差公式

$\sin x\cdot\sin(x+\varphi)=-\frac{1}{2}[\cos(2x+\varphi)-\cos\varphi]$.] (4) $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.

4. $\frac{1}{10\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx<\frac{1}{10}$.

8. 对积分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$，不能用牛顿-莱布尼兹公式．这是因为被积函数$\frac{1}{x^2}$在区间$[-1,1]$上是无界的$\left(\frac{1}{x^2}\text{ 在点 }x=0\text{ 附近无界}\right)$．同样，对积分$\int_0^2\frac{1}{(x-1)^2}dx$也不能用牛顿-莱布尼兹公式．

10. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{2}{\pi}$.

习题四 **1**. 0, 0, $-\pi$.

2. (1) $x\sqrt{1+x^2}$; (2) $x^2\ln x\ (x>0)$; (3) $-e^{-x^2}$;

(4) $2x\sqrt{1+x^4}$; (5) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$;

(6) $-\sin x\cdot\cos(\cos^2 x)-\cos x\cdot\cos(\sin^2 x)$; (7) $\sin b^2$;

(8) $-\sin a^2$; (9) 0.

3. $\Phi(0)=0$, $\Phi(1)=\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}$. [提示：$\Phi(x)$在$[0,1]$上是单调的．]

4. (1) 1; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{\pi^2}{4}$.

习题五 **1**. (1) $-5+8\ln 2$; (2) $\frac{5}{3}$; (3) $\frac{\pi}{6}$; (4) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(5) $\frac{\pi a^4}{16}$; (6) $\frac{\sqrt{2}}{2a^2}$; (7) $\frac{\sqrt{3}}{8a^2}$; (8) 2; (9) $a(\sqrt{3}-1)$;

(10) $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$;　(11) $\ln\frac{2e}{1+e}$;　(12) $\frac{8}{15}$;　(13) $\frac{3}{16}\pi$;

(14) 0;　(15) $\frac{3}{8}\pi$;　(16) $\frac{8}{35}$;　(17) $\frac{5}{16}\pi$;　(18) $\frac{3}{256}\pi$;

(19) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$;　(20) $\frac{1}{4}(e^2+1)$;　(21) $4(2\ln 2-1)$;

(22) $\frac{1}{4}(\pi-2)$;　(23) $\frac{(9-4\sqrt{3})\pi}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$;　(24) $\frac{\pi^2}{2}-4$;

(25) $\frac{1}{4}(1-\ln 2)$;　(26) π^2;　(27) $\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}a^{2n+1}$;

(28) $\operatorname{arc\,tg} f(3)-\operatorname{arc\,tg} f(-1)$.

2. (1) 0;　(2) 0;　(3) 0;　(4) 0.

3. (1), (2)都不正确. 读者自己改正.

4. (1), (2), (3)都不正确, 因为所作代换在讨论的区间的某些地方没有意义.

5. 在积分$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$中, 令$x=\sin t$不合适. 因为此时积分区间为[0, 3]. 可以把

$$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx \text{变为} -\frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt[3]{1-x^2}\,d(1-x^2).$$

然后求积分.

6. 提示: 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$.

7. 提示: $\int_a^{a+nT}=\int_a^{a+T}+\int_{a+T}^{a+2T}+\cdots+\int_{a+(n-1)T}^{a+nT}=\int_0^T+\int_0^T+\cdots+\int_0^T$.

8. 提示: 令 $x^2=t$.

9. $\frac{1}{2}(a^2-b^2)$.　**10**. 提示: 令 $x=1-t$.　**11**. 提示: 令 $x=-t$.

13. (1) 提示: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$,

再证右端第一项等于$\int_0^a f(x-a)dx$.

15. 提示: 根据定积分的可加性. 有

$$\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\,dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin^n x\,dx,$$

对于右端后三个积分，各作一适当代换，使之化为区间$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上的某个积分.

16. 提示：只需证当 n 为奇数时，有 $\Phi(x+2\pi)=\Phi(x)$.

$$\Phi(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\sin^n t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin^n t\,dt+\int_{2\pi}^{x+2\pi}\sin^n t\,dt,$$

当 n 是奇数时，由第 15 题知此式右端第一项为零，故只需证

$$\int_{2\pi}^{x+2\pi}\sin^n t\,dt=\int_0^x\sin^n t\,dt=\Phi(x),$$

作一适当的代换即可.

19. 提示：令 $\Phi(t)=\int_0^t f(x)dx$, 则左端

$$\int_0^x\left[\int_0^t f(x)dx\right]dt=\int_0^x\Phi(t)dt,$$

再对右端积分用一次分部积分法.

习题六 **1**. 0.9573. **2**. −6.2832. 结果一致. **3**. 1.4675. **4**. 1.3707. **5**. 4.822. [提示：先求出

$$f''(x)=\frac{3x}{4}\left[1+\frac{12}{4+x^3}\right]\frac{1}{\sqrt{4+x^3}},$$

以估计 $f''(x)$ 的界 C_2, 从而确定出分割的份数 $n=10$.]

第 四 章

习题一 一、**1**. (1) $\frac{1}{6}$; (2) 1; (3) $\frac{32}{3}$; (4) $\frac{125}{48}$;

(5) $4-\frac{\pi}{2}+\frac{1-e^2}{e^3}$; (6) $2\pi^2$; (7) 1; (8) $\frac{7}{12}$.

2. (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{7}{3}$; (3) $9.9-8.1\lg e\approx 6.38$; (4) $\frac{7}{6}$;

(5) $2\pi+\frac{4}{3}$, $6\pi-\frac{4}{3}$; (6) $\frac{\pi}{2}$.

3. $3\pi a^2$. **4**. $\frac{3}{8}\pi a^2$. **5**. $\frac{3}{2}\pi a^2$. **6**. $\frac{\pi a^2}{4}$. **7**. $\frac{5}{4}\pi-2$, $2-\frac{\pi}{4}$.

二、**1**. $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$; 当 $\alpha=45°$, 为 $\frac{2}{3}a^3$.

[提示：设法求出平行截面面积 $A(x)$, 再利用公式(6).]

2．提示：作法与上题类似．这里，平行截面是椭圆，其面积是

$$A(x)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

3．(1) $\frac{32}{5}\pi$； 8π； (2) $\frac{\pi a^2}{4}\left[2a+\frac{a}{2}(e^2-e^{-2})\right]$； (3) $160\pi^2$；

(4) $\frac{\pi^2}{2}$；$2\pi^2$； (5) $5\pi^2a^3$；

(6) 160π. $\left[\text{提示：}\quad V=\pi\int_0^8 y^2\,dx,\ x=r\cos\theta=4(1+\cos\theta)\cos\theta,\right.$

$$\left.y=r\sin\theta=4(1+\cos\theta)\sin\theta.\right]$$

5．$9.1\pi\times10^6$． 6．$4.08\times10^8\pi$． 7．$\frac{206}{15}\pi$． 8．$\pi^2-2\pi$．

9．$2\pi^2a^2b$． 10．π^2a^3．

三、1．$b\sqrt{1+4a^2b^2}+\frac{1}{2a}\ln(2ab+\sqrt{1+4a^2b^2})$． 2．$\ln3-\frac{1}{2}$．

3．$2a\,\mathrm{sh}\,1$． 4．$6a$． 5．$\sqrt{2}(e-1)$． 6．$8a$．

7．$\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$． 8．$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$．

四、1．$\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}-\ln\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}+1)}{2}\right]$． 2．$4\pi^2ab$．

3．$2\pi a\left(b+\frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{2b}{a}\right)$； $2\pi a\left(a+b\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}-a\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}\right)$．

4．$2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$； $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$，

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率． 5．$\frac{12}{5}\pi a^2$．

6．$\frac{64}{3}\pi a^2$；$16\pi^2a^2$． 7．$2\pi a^2(2-\sqrt{2})$．

习题二 一、1．23.64米；2.36米/秒． 2．$\frac{1}{3}(T^3+1-\cos3T)$．

3．156.25米．

二、1．2560吨． 2．$2444\frac{4}{9}$公斤． 3．πab^2． 4．$\frac{1}{6}a^2b$；$\frac{1}{3}a^2b$．

5．$\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$． 6．576π公斤．

三、1. $18k$ 尔格. 2. $\frac{10^3}{4}\pi r^4$ 公斤·米. 3. 1.25×10^6 公斤·米.
4. 10200π 公斤·米. 5. 2.94×10^9 公斤·米. [提示: 地球和卫星之间的引力可按万有引力定律 $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ 来计算. 其中 r 为卫星到地心的距离,地球质量为 5.98×10^{24} 千克,引力常数 $G=6.67\times10^{-8}$ 厘米^3/克·秒^2.] 6. $\frac{500}{3}$ 克重·厘米. 7. $\frac{M^3g^2}{6m^2}$. [提示: 写出雨滴在下落过程中任意时刻 t 所受的重力以及到完全蒸发所需的时间.]
8. $\frac{4}{3}\pi r^4$. [提示: 取球心为坐标原点. 球在水中的部分,重力与浮力相等,外力不作功,只有对于球露出水面的部分,外力才作功.]

四、2. $\boldsymbol{F}=\{F_x, F_y\}$,

其中 $$F_x=\frac{GMm}{l}\left[\frac{1}{h}-\frac{1}{\sqrt{l^2+h^2}}\right],\quad F_y=\frac{-GMm}{h\sqrt{l^2+h^2}}.$$

3. $F=\frac{kQ}{r_0(r_0+l)}$; $W=\frac{kQ}{l}\ln\frac{b(a+l)}{a(b+l)}$ (k 为常数).

4. 大小为 $\frac{2Gm}{\pi r^2}$(G 为引力常数),方向由质点指向弧中心.

五、1. $\frac{19}{36}Ml^2$. 2. $J=\frac{1}{3}Ma^2$; $E=\frac{Ma^2\omega^2}{6}$. 3. $\frac{M}{8}(D_2^2+D_1^2)$.

4. $\frac{5}{4}Ma^2$. 6. $\frac{1}{2}Ma^2$. 7. $\frac{1}{2}\rho\pi h(R^4-r^4)$.

六、1. $\overline{U}=\frac{U_m}{\pi}$, $U_{有效}=\frac{U_m}{2}$. 2. $\overline{U}=\frac{U_m}{\pi}$, $U_{有效}=\frac{U_m}{2}$.

3. $\overline{I}=\frac{c}{T}a$, $I_{有效}=\sqrt{\frac{c}{T}}\cdot a$. 4. $\overline{U}=0$, $U_{有效}=E$.

5. $\overline{U}=\frac{h}{2}$, $U_{有效}=\frac{h}{\sqrt{3}}$. 6. $\overline{P}=I_m^2\cdot R$.

七、1. 75 千克. 2. $Q=\frac{16}{3}V$ 米^3/秒. [提示: 单位时间内, 流体流过某截面的体积称为流量. 当流速不变时, 流量=流速 $v\times$ 截面积 S.]

8. $\frac{k\pi a^4}{2}$. [提示：用微元法将管的横截面分成若干圆环，先写出通过任一圆环面的流量的近似值——流量微元.]

第 五 章

习题一 1. (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{1}{\lambda}$; (3) $\frac{\pi}{2k}$; (4) $\frac{\pi}{k}$; (5) $-\frac{1}{2}$;

(6) 1; (7) $\frac{1}{a^2}$; (8) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; (9) $-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{4}\ln 3$; (10) $n!$.

2. (1) 发散; (2) 发散; (3) $k>1$ 收敛, $k\leqslant 1$ 发散; (4) 收敛; (5) 收敛; (6) 绝对收敛; (7) 绝对收敛; (8) 发散; (9) 收敛; (10) 收敛.

4. 提示：考虑不等式$(|a|-|b|)^2=a^2+b^2-2|a\cdot b|\geqslant 0$,

即 $|a\cdot b|\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, 以及不等式$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.

6. 均收敛；曲线下的面积存在.

7. $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$ 收敛; $\int_{0}^{+\infty}f(x)dx$ 及 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

8. $\frac{2Gm\rho}{a}$, 方向垂直指向细杆, G 是引力常数.

习题二 1. (1) $\frac{9}{2}$; (2) $\frac{51}{7}$; (3) 1; (4) $\frac{8}{3}$; (5) $\frac{\pi}{2}$;

(6) $\frac{\pi}{2}$; (7) π; (8) $\frac{1}{2}(a+b)\pi$.

2. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 发散; (5) 发散; (6) 收敛; (7) 收敛; (8) 收敛; (9) 发散; (10) 发散; (11) 发散. $\left[\text{提示：考虑极限} \lim\limits_{x\to 0} x\frac{1}{e^x-1}.\right]$

3. π.

4. (1) 收敛; [提示：$x=0$ 是瑕点，将积分拆成两项:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=I_1+I_2.$$

对于瑕积分 I_1, 取 $0<\alpha<1$, 考虑极限

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{\ln x}{1+x^2},$$

对于无穷积分 I_2，取 $1<\alpha<2$，考虑极限

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \frac{\ln x}{1+x^2}. \;]$$

(2) 当 $0<s<1$ 时，积分收敛．[提示：当 $s-1<0$ 时，$x=0$ 是瑕点．

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx = I_1 + I_2.$$

积分 I_1 当 $s>0$ 时收敛；积分 I_2 当 $0<s<1$ 时收敛.]

7．提示：考虑不等式 $|f(x)| \leqslant \dfrac{1+f^2(x)}{2}$.

8．提示：考虑不等式：

$$[f(x)+g(x)]^2 \leqslant 2[f^2(x)+g^2(x)],$$

$$|f(x)\cdot g(x)| \leqslant \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}.$$

9．2.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝一元函数积分学
作者＝文丽
页数＝３４４
ＳＳ号＝１０２３６８８２
出版日期＝１９８０年０７月第１版

前言
目录